JAN 9 - 1947

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. K. Osterhammel: Optische Untersuchung des Schallfeldes kolbenförmig schwingend. Quarze 73
2. Oskar Vierling: Elektrisch verbesserte Raumakustik 86
3. Karl Menges: Über Richtcharakteristiken von ebenen Strahlerflächen, Strahlerstrecken mit ungleichmäßiger Amplitudenverteilung und der Halbkreislinie 90
4. H. Pfriem: Zur thermischen Dämpfung von Schallwellen in staub- und nebelhaltiger Atmosphäre 109
5. C. W. Kosten und C. Zwikker: Die Messung von akustischen Scheinwiderständen u. Schluckzahlen durch Rückwirkung auf ein Telefon . 124
6. Schrifttum 131
7. Nachrichten 163

Zweites Heft Sechster Jahrgang März 1941

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10.— RM je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

Professor Dr. Erwin Meyer, Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule, Berlin NW. 87, Franklinstr. 1

*

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an: Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

WECO-DÄMMSTOFFE-DRP.

gegen Schall jeder Art und Stärke (z. T. auch Wärme) entsprechen den bisherigen Forschungsergebnissen, der neuzeitlichen Technik und den Forderungen der Praxis und Erfahrung und besitzen höchsten Dämmwert, gleichbleibende Dauerwirkung, größte Wirtschaftlichkeit, geringste Baustärke, beste Belastungsfähigkeit und weitgehende Immunität gegenüber allen normalen Einflüssen der Praxis.

Tausendfach bewährte WECO-Schalldämmungen auf Grund 25jähriger Erfahrungen im In- und Ausland, zahllose Referenzen von staatlichen, städtischen, industriellen und sonstigen Bauten und Betrieben über von uns ausgeführte Schall-Dämmungen bei Fußböden, Wänden, Auflagern, Maschinen, Fundamenten usw.

WEISS & CO, LEIPZIG C1 / Weco-Schalldämmungen-DRP.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Zweites Heft Sechster Jahrgang März 1941

Optische Untersuchung des Schallfeldes kolbenförmig schwingender Quarze*)

Mitteilung aus dem physikalischen Institut der Universität Köln

Von K. Osterhammel

(Mit 15 Textabbildungen)

Einleitung

Hochfrequente Schallwellen haben seit der Entwicklung geeigneter Schallgeber für die experimentelle Untersuchung vieler Probleme der Wellenphysik Bedeutung erlangt. Sie ermöglichen u. a. die Ausführung von Untersuchungen, die im optischen Analogiefall nicht durchführbar sind und im Hörschallgebiet vielleicht nur mit großem experimentellen Aufwand. Gerade die Untersuchung der besonders interessierenden Erscheinungen, bei denen das beugende Objekt und die Wellenlänge von gleicher Größenordnung sind, bereitet große Schwierigkeiten. Die Kleinheit der Wellenlänge des sichtbaren Lichtes macht z. B. die Beobachtung der FRESNELschen Beugungserscheinungen im Gebiet weniger Wellenlängen oder erst recht von Bruchteilen von Wellenlängen hinter dem beugenden Gegenstand unmöglich. In der Akustik interessiert die Kenntnis der Richtwirkung von Schallgebern und -empfängern, die von dem Verhältnis von Durchmesser D der Schallquelle zur Wellenlänge λ abhängig ist. Da im Hörschallgebiet λ groß ist und die Größe von D nicht beliebig gesteigert werden kann, so müssen die experimentellen Untersuchungen auf kleine Verhältnisse von D/λ beschränkt bleiben. Mit Ultraschall können infolge der Kleinheit der Wellenlänge sehr große D/λ-Werte ohne Schwierigkeit erreicht werden.

Alle Untersuchungen der Schallfelder — im Bereich des Hör- wie auch des Ultraschalls — konnten früher nicht durchgeführt werden, ohne einen Empfänger für Druck- oder Bewegungsschwankungen einzuführen. Wenn der Empfänger nicht klein gegenüber der Wellenlänge ist, sind Störungen des Schallfeldes unvermeidlich. Die Untersuchung von Erscheinungen, die kleiner als die eingeführten Sonden sind, ist überhaupt unmöglich. Die Entwicklung der optischen Methoden der Ultraschallforschung hat neue Möglichkeiten der Schallfelduntersuchung erschlossen. Das Strahlungsfeld kann mittels Lichtstrahlen störungfrei abgetastet werden.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist es, mittels der neuen optischen Methoden das Schallfeld eines rechteckigen, kolbenförmig schwingenden Piezoquarzes zu untersuchen. Der Quarz hat eine solche Form, daß die erhaltenen Ergebnisse mit den aus der Optik bekannten Beugungserscheinungen vor einem unendlich langen Spalt in starrer Wand verglichen werden können. Die Untersuchung umfaßt also nicht nur ein akustisches, sondern ein allgemeines Problem der Ausbreitung von Wellen. Es ist von Bedeutung, daß die benutzte Methode die direkte Sichtbarmachung eines im Verhältnis zur Größe der Schallquelle ausgedehnten Feldes erlaubt. Daher können gleichzeitig Beugungserscheinungen in der Nähe des Strahlers (entsprechend der FRESNELschen Beugung) und in so großer Entfernung, daß angenähert die Gesetze der FRAUENHOFERschen Beugung gelten, beobachtet werden.

(* D 38 (gekürzt).

Überblick über die wichtigsten experimentellen und theoretischen Arbeiten

Die Beugung des Schalles ist theoretisch und experimentell namentlich von Lord RAYLEIGH[1]) untersucht worden. Ihm verdanken wir die Ausgestaltung der Theorie für Schallwellen und die Entwicklung der fundamentalen Formeln. Es gelang ihm, die Beugung durch eine Kreisöffnung, eine Ringöffnung und an einem Kreisschirm sehr schön zu veranschaulichen, wobei als Indikator die empfindliche Flamme diente. Untersuchungen der Beugung am Spalt ergaben statt der erwarteten stetigen Abnahme der Intensität mit der Entfernung vom Spalt Maxima und Minima, was er auf die Bildung stehender Wellen zurückführte. ALTBERG[2]) studierte die Schallbeugung an einem Gitter, indem er um hohe Frequenzen, d. h. kleine Wellenlängen, zu erhalten, die periodische Erwärmung einer Funkenstrecke bei der Kondensatorentladung benutzte. Er maß den Schallstrahlungsdruck mit einem von ihm konstruierten Radiometer. Wegen der Originalität von Schallgeber bzw. Indikator seien die Arbeiten von S. KALISCHER[3]) und F. A. SCHULZE[4]) erwähnt. Ersterem dienten zur Untersuchung und Demonstration der geradlinigen Ausbreitung des Schalles die hohen klirrenden Töne eines Eisendrahtbündels in von intermittierendem Strom durchflossener Spule. SCHULZE beugte die von einer Galtonpfeife ausgehenden Wellen an einem aus Karton geschnittenen Gitter und suchte das Beugungsfeld mit einer kleinen Glimmerplatte, auf der sich Klangfiguren bildeten, ab.

Eine der ersten Untersuchungen über die Richtwirkung von Lautsprechern ist die von BACKHAUS und TRENDELENBURG[5]). Als Schallerzeuger wurde ein RIEGGERscher Blatthaller verwandt, da derselbe mit großer Annäherung als Kolbenmembran schwingt. Als Empfänger diente ein Kondensatormikrophon, welches mittels RAYLEIGHscher Scheibe geeicht worden war. Die verstärkten Ströme wurden durch eine Oszillographenschleife, deren Ausschlag ein Maß für die Druckamplitude vor dem Mikrophon ist, geleitet. Aus dem RAYLEIGHschen Ansatz für das Geschwindigkeitspotential im Schallfeld einer kreisförmigen Kolbenmembran, die in einer unendlich ausgedehnten starren Wand schwingt, berechneten sie das Schallfeld auf der Symmetrieachse einer solchen Membran. Die Messungen auf der Mittelachse ergaben die berechneten Maxima und Minima. Zum andern maßen sie die Druckamplituden auf einem Halbkreis mit großem Radius um den Lautsprecher in Abhängigkeit von der Richtung. Sie fanden eine mit wachsender Frequenz zunehmende Richtwirkung und konnten bei großen D/λ auch Interferenzerscheinungen nachweisen. BACKHAUS[6]) gelang es für Aufpunkte abseits der Mittelsenkrechten, aber in größerem Abstand als dem Membranradius, mittels einer besonderen Methode Lösungen des RAYLEIGHschen Integrals zu erhalten. Die experimentelle Untersuchung ergab eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie.

STENZEL[7]) hat für den praktisch fast allein interessierenden Fall, daß die Entfernung des Aufpunktes von der Membran groß gegenüber dem Durchmesser ist, das Schallfeld bestimmt. Seine Berechnungen stimmen relativ gut mit obigen Messungen von BACKHAUS und TRENDELENBURG überein. Er geht aus von dem Einzelstrahler, dessen Ausdehnung als klein zur Wellenlänge und infolgedessen als punktförmige Quelle angesehen werden kann, die nach allen Seiten gleichmäßig abstrahlt. Er betrachtet dann die Richtwirkung von in einer Reihe liegenden punktförmigen Schallquellen und kommt durch einen Grenzübergang zur strahlenden Fläche. Für die Richtwirkung einer rechteckigen Kolbenmembran ergibt sich ein Ausdruck, der der FRESNEL-KIRCHHOFFschen Formel der Optik für FRAUENHOFERsche Beugung an einer rechteckigen Öffnung entspricht. Aus dem allgemeinen RAYLEIGHschen Ansatz für das Geschwindigkeitspotential erhält er das gleiche Resultat[8]).

M. I. O. STRUTT[9]) hat die Beugung ebener Wellen behandelt. Er gibt dem Problem der Beugung einer ebenen elektromagnetischen oder akustischen Welle an einem Spalt von endlicher Breite in einem unendlich ausgedehnten Schirm unter Heranziehung von MATHIEUschen Funktionen eine strenge Lösung. Er hat die numerische Auswertung seiner Formel bis zu einer Spaltbreite von $^2/_3$ Wellenlänge vornehmen können und kommt zu dem Ergebnis, daß die KIRCHHOFFsche Formel dem exakten Ergebnis viel näher kommt, als eine von RAYLEIGH für schmale Spalte angegebene. STRUTT schließt, daß für Spalte von mehr als etwa einer Wellenlänge Breite die klassische FRESNEL-KIRCHHOFFsche Beu-

[1]) Lord RAYLEIGH, Theory of sound, London 1894—1896.

[2]) W. ALTBERG, Ann. Phys., 23 (1907), S. 267.

[3]) S. KALISCHER, Wied. Ann. 41 (1890), S. 756.

[4]) F. A. SCHULZE, Ann. Phys. 24 (1907), S. 785.

[5]) H. BACKHAUS und F. TRENDELENBURG, Z. techn. Phys. 7 (1926), S. 630.

[6]) H. BACKHAUS, Ann. Phys. 5 (1930), S. 1.

[7]) H. STENZEL, Elektr. Nachr.-Techn. 4 (1927), S. 240.

[8]) Neuerdings hat H. STENZEL, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, Berlin 1939, die Berechnung des Schallfeldes in der Nähe eines kreisförmigen Strahlers für nicht zu große D/λ allgemein durchgeführt.

[9]) M. I. O. STRUTT, Z. Phys. 69 (1931), S. 597.

gungstheorie innerhalb weniger Prozent mit der exakten Rechnung übereinstimmt.

R. W. Boyle wies wohl zuerst auf die Bedeutung der Ultraschallwellen für die Untersuchung von Schallfeldern und sonstiger Probleme der Wellenphysik hin. Boyle, Lehmann und Reid[10]) untersuchten das Schallfeld eines kreisförmigen in Wasser schwingenden Quarzmosaiks. Zur direkten Sichtbarmachung wurden Staubfiguren benutzt. Der in der Flüssigkeit schwebende Koksstaub setzte sich auf einer ebenen zum Schallgeber senkrechten Platte ab. Die sinkenden Teilchen werden durch den Strahlungsdruck vorwärts getrieben, wobei die Mehrzahl von ihnen von den Stellen maximaler Energie zu denjenigen minimaler Energie abwandern. Durch Abhören des Schallfeldes mittels piezoelektrischer Empfänger wurden in unmittelbarer Nähe des Schallgebers Zonen maximaler und minimaler Intensität festgestellt, die sich bis in einige Entfernung vom Quarz ausdehnten. Außerdem fanden sie Maxima und Minima längs der Symmetrieachse.

Diese mechanischen Methoden sind bei hohen Frequenzen nicht mehr anwendbar und werden durch die optischen ersetzt. Mittels der im nächsten Abschnitt zu behandelnden optischen Methoden wurden Schallbeugungs- und Interferenzerscheinungen von Grossmann und Hiedemann[11]), R. Bär[12]) und S. Kretschmer und S. Rschevkin[13]) untersucht.

Es sei noch F. W. Hehlgans[14]) erwähnt, der die Intensitätsverteilung vor rechteckigen Quarzen in Abhängigkeit vom Winkel maß und eine angenäherte Übereinstimmung mit den auf Grund der optischen Theorie der Beugung an einem Einzelspalt errechneten Werten fand. Die Theorie ergibt z. B. die Nullstellen der Schallabstrahlung in den Richtungen 15°, 31° und 52°, während die beobachteten Werte bei 14° bzw. 16°, 36° bzw. 38° und 56° bzw. 60° lagen.

Die Entwicklung der optischen Methoden der Ultraschallforschung und ihre Anwendung im Rahmen vorliegender Arbeit

Debye und Sears[15]) und gleichzeitig Lucas und Biquard[16]) konnten zeigen, daß eine von hochfrequenten Schallwellen durchsetzte Flüssigkeit als optisches Gitter wirken kann. Bildet man also senkrecht durch die in der Flüssigkeit laufende Schallwelle einen Spalt optisch auf einem Schirm ab, so entstehen neben dem zentralen Spaltbild Beugungsspektren bis zu hohen Ordnungszahlen, deren Abstand vom Zentralbild mit wachsender Schallfrequenz zunimmt. Bär und Meyer[17]) machten mittels der Beugungserscheinungen die Ausbreitung der Schallwelle in der Flüssigkeit sichtbar. Statt des Spaltes werden eine große Anzahl regelmäßig angeordneter Lochblenden durch das Schallfeld hindurch abgebildet. Im Bild sind dann die Punkte, deren Licht durch die Schallwelle gegangen ist, in der Ausbreitungsrichtung zu einer Reihe von Beugungsspektren auseinandergezogen. Da die Zahl der auftretenden Ordnungen eine Funktion der Schallintensität ist, erhält man einen Überblick über die Intensitätsverteilung im Schallfeld. Zur Untersuchung der Abstrahlung stabförmiger Schallquellen kann man den Spalt durch eine Lochblende ersetzen. Es werden Beugungserscheinungen an allen Schallwellen beobachtet, die senkrecht zum Lichtstrahl verlaufen. Befindet sich der Quarz in der Mitte eines nicht zu breiten Lichtbündels, ergibt sich als Beugungsbild Abb. 1. Man erkennt die

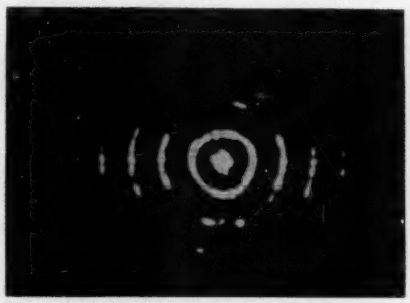

Abb. 1. Beugungsbild des Schallfeldes um einen stabförmigen Quarz

Richtungen maximaler Schallabstrahlung und kann aus der Anzahl der auftretenden Beugungsordnungen die Intensitäten von Haupt- und Nebenmaxima abschätzen. Das Verhältnis von

[10]) R. W. Boyle, J. F. Lehmann und C. D. Reid, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III 19 (1925), S. 167.

[11]) E. Grossmann und E. Hiedemann, Z. Phys. 95 (1935), S. 383. E. Grossmann, Phys. Z. 35 (1934), S. 83.

[12]) R. Bär, Helv. phys. Acta 10 (1937), S. 311.

[13]) S. Kretschmer und S. Rschevkin, Techn. Physics USSR 4 (1937), S. 1004.

[14]) F. W. Hehlgans, Ann. Phys. 86 (1928), S. 587.

[15]) P. Debye und F. W. Sears, Proc. nat. Acad. Sci., Wash. 18 (1932), S. 410.

[16]) R. Lucas und P. Biquard, Compt. rend. Acad. Sci., Paris 194 (1932), S. 2132.

[17]) R. Bär und E. Meyer, Phys. Z. 34 (1933), S. 393.

Durchmesser D des Quarzes zur Wellenlänge λ ist gleich 4,2. Der halbe Öffnungswinkel des Hauptstrahls beträgt 13°; der theoretische Wert ist 13° 50′.

HIEDEMANN und Mitarbeiter[18])[19]) haben eine Methode entwickelt, um Ultraschallwellen direkt sichtbar zu machen. Eine durch die Flüssigkeit laufende ebene Schallwelle besteht aus aufeinanderfolgenden Verdichtungen und Verdünnungen. Demzufolge variiert in Richtung der Schallwelle die Dichte der Flüssigkeit und damit der Brechungsindex periodisch. In fortschreitender Schallwelle treten in Abständen der Wellenlänge Maxima und Minima des Brechungsindex auf. Die Art der Dichteverteilung ermöglicht die Benutzung der Ultraschallwelle als abbildendes System. Sie wirkt ähnlich einem System nebeneinanderliegender, abwechselnd konvex und konkaver Zylinderlinsen, die sich bei fortschreitenden Wellen mit Schallgeschwindigkeit bewegen. Um die sich mitbewegenden Brennlinien — ein Abbild der Schallwelle — für einen ruhenden Beobachter sichtbar zu machen, muß das einfallende Licht im Takt der Schallfrequenz durchgelassen werden. Man beobachtet dann das Schallwellengitter immer in der gleichen Phase. Wird die als Stroboskop benutzte Kerrzelle zur Verhinderung der Frequenzverdoppelung mit genügender Gleichstromvorspannung betrieben, so haben die beobachteten Linien einen Abstand gleich einer Wellenlänge. Abb. 2 zeigt das Phasenfeld des gleichen Quarzes wie in Abb. 1. Da die Begrenzung der Haupt- und Nebenmaxima deutlich zu erkennen ist, kann der Beugungswinkel gut bestimmt werden. Der halbe Öffnungswinkel des Hauptmaximums ist gleich 13° 30′, der theoretische 13° 50′. Über die Intensitätsverteilung im Schallfeld läßt sich jedoch nichts aussagen. Um getreue Bilder der Schallwellenfronten zu erhalten, ist eine genaue Justierung der Quarze parallel zum durchgehenden Licht unbedingt erforderlich, was mit der nötigen Genauigkeit nur mittels der folgenden Methode möglich ist.

[18]) E. HIEDEMANN, Ergebn. exakt. Naturw. 14 (1935).
[19]) E. HIEDEMANN, Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung, Berlin 1939.

Diese ist eine Variante der TOEPLERschen Schlierenmethode und wurde in verschiedenen Ausführungsformen von R. BÄR[20]), E. HIEDEMANN und K. H. HOESCH[21]) und PARTHASARATHY[22]) angegeben. Man bringt an den Ort der vom Schallwellengitter erzeugten Beugungsspektren eine Blende und läßt z. B. in der Anordnung von HIEDEMANN und HOESCH nur eine einzige Ordnung zur Abbildung durch. Bei Benutzung der höheren Ordnungen wird also das nichtabgebeugte Licht weggeblendet;

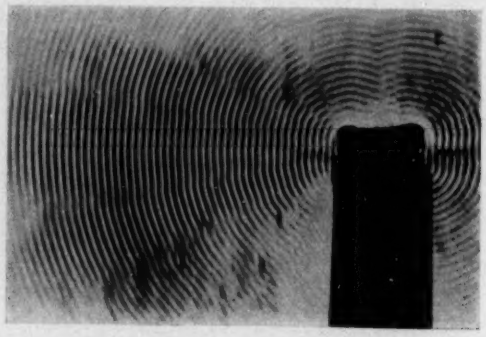

Abb. 2. Wellenfeld um einen stabförmigen Quarz

in dem entstehenden Dunkelfeld zeigen nur diejenigen Stellen eine Aufhellung, die von Schallwellen überstrichen werden. Hierbei wird selbst bei stehenden Wellen nach der ABBEschen Theorie der mikroskopischen Abbildung die störende Sichtbarmachung des Schallwellengitters verhindert; es werden nur die Inhomogenitäten des Schallfeldes sichtbar. Bei Benutzung fortschreitender Wellen ist es nicht nötig, die Abbildung des Gitters zu unterdrücken, da dieselbe ja ohne Stroboskop sowieso nicht zustande kommt. Man kann daher nach BÄR und PARTHASARATHY auch mehrere Beugungsordnungen benutzen. Die Empfindlichkeit der Dunkelfeldanordnung ist sehr groß, da sich schwache Lichtintensitäten in einem dunklen Feld gut beobachten lassen. Die auftretenden Nebenmaxima können noch bei sehr großem D/λ vollständig sichtbar

[20]) R. BÄR, Helv. phys. Acta 9 (1936), S. 617.
[21]) E. HIEDEMANN und K. H. HOESCH, Z. Phys. 104 (1937), S. 197.
[22]) S. PARTHASARATHY, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4 (1936), S. 555.

gemacht werden. Benutzt man nur das Licht einer einzigen Ordnung zur Abbildung, so ergibt sich eine Anordnung, die von HIEDEMANN und OSTERHAMMEL[23]) zu einer Methode der direkten Sichtbarmachung des Intensitätsverlaufs entwickelt worden ist. Es hat sich gezeigt, daß die Benutzung der nullten Ordnung, also der komplementäre Fall zur TOEPLERschen Anordnung, am besten geeignet ist. Bei weißem Licht sind die Orte gleichen Schalldrucks durch Linien gleicher Farbe verbunden.

Form und Schnitt der Schallgeber

Die oben beschriebenen optischen Methoden erlauben jedoch nur die genauere Untersuchung von Schallfeldern bestimmter Form. Ein durch das Schallfeld gehender Lichtstrahl erfährt auf seinem ganzen Wege eine Beeinflussung, die von der Intensität und der Richtung der Schallwellen abhängt. Das Schallfeld muß also in Richtung einer Raumkoordinate konstant sein. Die Untersuchungen müssen daher beschränkt bleiben auf Beugungserscheinungen an Hindernissen, die parallel zur Lichtrichtung gerade Begrenzungen aufweisen und deren Länge viel größer als ihre Breite ist. Eine rechteckige Öffnung muß so lang und schmal sein, daß sie als unendlich langer Spalt betrachtet werden kann. Die experimentelle Untersuchung der Beugung ebener Schallwellen an einem Spalt bereitete anfangs große Schwierigkeiten[11]). Bei dünnen Spaltbacken war es schwer, eine genügende Schallundurchlässigkeit zu erreichen und bei dicken keilförmigen wurde die Wellenfront derart deformiert, daß sie nicht mehr als eben anzusprechen war. Dies machte einen Vergleich mit dem analogen Problem der Beugung ebener Lichtwellen an einem unendlich langen Spalt in vollkommen starrer Wand unmöglich.

Um die Analogie zu erreichen, könnte man auch schmale Piezoquarze benutzen, die viel länger als breit sind und bei denen alle Punkte der strahlenden Fläche mit gleicher Amplitude und Phase, also kolbenförmig schwingen. Quarzstäbe, die diese Bedingungen weitgehend erfüllen, wurden nach Angabe von E. HIEDEMANN geschnitten.

Bekanntlich ist der Elastizitätsmodul des Quarzes in der Y—Z-Ebene keine Konstante (Z- oder optische, X- oder elektrische, Y- oder neutrale Achse, senkrecht zu Z und X), sondern nimmt in zwei Richtungen Extremwerte an, und zwar unter einem Winkel von $+71^0\,32'$ ein Minimum[24]). Bei Quarzstäben, die senkrecht zu X geschnitten sind und deren Längskante parallel zur Richtung des kleinsten E-Moduls verläuft, folgen die Schwingungen genau der geometrischen Form des Quarzes. Die kleinen Stirnflächen derselben schwingen daher nahezu kolbenförmig, was in unserem Fall von den schmalen Seitenflächen verlangt wird. Die Stäbe werden so geschnitten, daß nicht — wie sonst üblich — die Längsrichtung unter $71^0\,32'$ verläuft, sondern die Normale der strahlenden Fläche in die Richtung des kleinsten E-Moduls zeigt. Es standen zwölf 30 mm lange Quarzstäbe zur Verfügung.

Optische und mechanische Anordnung

Das Licht einer Bogenlampe wird mittels Kondensor K (Abb. 3) auf eine Lochblende B_1 von 0,3 mm Durchmesser, die möglichst kreisrund in Nickelin-

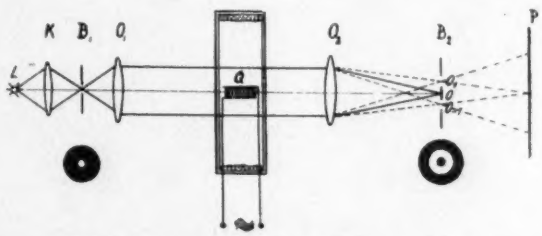

Abb. 3. Schema der optischen Anordnung

Blech gebohrt wurde, konzentriert. Die Blende befindet sich im Brennpunkt eines Objektivs O_1, so daß das austretende und dann die Küvette durchsetzende Licht parallel ist. Im Brennpunkt von Objektiv O_2 befindet sich eine Ringblende B_2, mit der man die nullte Ordnung wegblendet und eine oder mehrere höhere Ordnungen durchlassen kann. Die Ringblenden wurden auf photographischem Wege hergestellt. Das entstehende Bild wurde auf einem Schirm aufgefangen oder belichtete direkt

[23]) E. HIEDEMANN und K. OSTERHAMMEL, Z. Phys. 107 (1937), S. 273; Proc. Indian Acad. Sci. 8 (1938), S. 275.

[24]) H. STRAUBEL, Hochfrequenztechn. 38 (1931), S. 19; s. auch A. MEISSNER, Phys. Z. 28 (1927), S. 621.

eine Photoplatte. Als Objektive dienten zwei gleiche Zeiß-Planare von 25 cm Brennweite und einem Linsendurchmesser von 6 cm. Es konnte also ein Schallfeld von maximal 6 cm Durchmesser ausgeleuchtet werden. Die Quarzstäbe wurden zwischen Messingplatten, die zugleich als Elektroden dienten, so auf einem Halter befestigt, daß sie frei nach zwei Seiten abstrahlen konnten (Abb. 4a). Die strahlende Fläche des Quarzes und die Oberfläche der Messing-

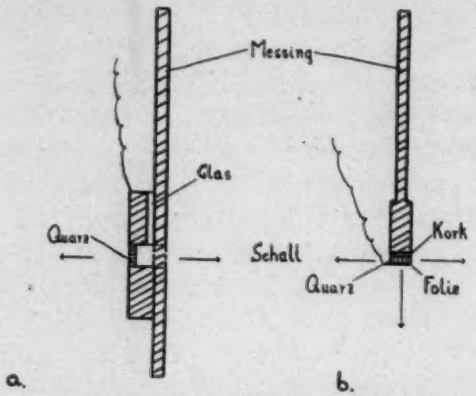

Abb. 4. Halterung der Quarze

platten lagen in einer Ebene, so daß der Fall einer Kolbenmembran in ausgedehnter starrer Wand angenähert verwirklicht war. Der Quarz konnte mit dem Halter in jede Richtung gedreht werden. In einigen Fällen wurde der Quarz mit einer Fläche senkrecht zur X-Achse mittels Zelluloidkitt auf eine metallische Fläche geklebt. Als zweite Elektrode diente eine dünne Aluminiumfolie. Um ein Mitschwingen des Halters zu vermeiden, wurde zwischen diesem und dem Quarz eine mit Stanniol beklebte Korkscheibe befestigt. Während der Quarz in der ersten Halterung einer Membran entspricht, die in einer starren Wand schwingt, läßt sich letzterer mit einer pulsierenden Membran vergleichen, d. h. einer Membran, deren beide Seiten mit gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten schwingen. Aus Symmetriegründen wird in der Mittelebene eines solchen Doppelmembransenders die Geschwindigkeit senkrecht zu dieser gleich Null. Der physikalische Vorgang ist der gleiche, ob diese Ebene zu einer starren Wand ausgebildet wird oder nicht. Das Schallfeld eines solchen Doppelmembransenders ist also für den Halbraum das gleiche wie das einer in starrer Wand schwingenden Kolbenmembran. Bei der Halterung des Quarzes nach Abb. 4b kann auch die Abstrahlung in der Richtung des elektrischen Feldes beobachtet werden. Außerdem hat sie den Vorteil, daß fast keine Wärmeschlieren auftreten, da der Temperaturausgleich zwischen dem Halter und der Flüssigkeit sich schnell vollziehen kann. Er wurde durch Rühren beschleunigt.

Um die Ausbildung stehender Wellen zu verhindern, mußten die Wände der Küvette gepolstert werden. Zuerst wurde Papierwatte verwandt, die jedoch nur so lange gut absorbierte, als sie noch ziemlich locker war. Großporige aufgerauhte Korkscheiben erwiesen sich auf die Dauer als besser geeignetes Schalldämpfungsmaterial.

Die elektrische Einrichtung

Die zur Anregung der Piezoquarze benötigte hochfrequente Wechselspannung lieferte ein Sender in Dreipunktschaltung mit einer 100-Watt-Kurzwellen-Senderöhre. Die benötigte Anoden-Gleichspannung von maximal 1000 Volt wurde einem getrennten Gleichrichter üblicher Bauart entnommen. Im allgemeinen wurde der zu erregende Piezoquarz galvanisch mit dem Sender gekoppelt. Sollte die Schallintensität stetig verändert werden, so erfolgte die Übertragung der Hochfrequenzspannung durch variable induktive Ankopplung.

Die Bestimmung der benutzten Frequenz erfolgte durch Überlagerung mit der eines elektronengekoppelten Meßsenders mit Niederfrequenzverstärkerstufe. Als Abstimmkondensator wurde ein Präzisionsdrehkondensator mit einer Endkapazität von 500 pF verwandt. Auf der in 180° eingeteilten Skala erhält man 1800 reproduzierbare Ablesepunkte. Die Trägerfrequenz des Ortssenders diente als Bezugsfrequenz, mit deren Hilfe man die Frequenzänderung des Gitterkreises jederzeit kontrollieren konnte. Die Eichung des Frequenzmessers geschah durch Vergleich mit den Harmonischen eines 100-kHz-Quarzes, der wiederum von einem Leuchtquarz kontrolliert wurde. Um eine größere Anzahl Eichpunkte zu erhalten, wurde diese Frequenz mittels Frequenzteiler nochmals unterteilt[25]). Die benutzte Frequenz konnte mit dieser Einrichtung mit einer Genauigkeit von $4 \cdot 10^{-4}$ gemessen werden.

Gang der Messung

Neben der genauen Ausrichtung der optischen Einrichtung mußte besonderer Wert auf die Justierung der Quarzstäbe gelegt werden. Es wurde schon erwähnt, daß Schnitte durch das Schallfeld in verschiedenen Ebenen senkrecht zur Lichtrichtung gleich sein müssen, damit das erhaltene Bild ein getreues Abbild des Schallfeldes ist. Diese Bedingung kann offensichtlich nur erfüllt sein, wenn der Quarz sich genau in der Lichtrichtung befindet.

Bogenlampe, Kondensor, Lochblende und erstes Objektiv wurden so eingestellt, daß letzteres sich

[25]) N. Seifen, Z. Phys. 108 (1938), S. 681.

konzentrisch im Lichtbündel befand und das helle Bildfeld auf einem Schirm gleichmäßig weiß ohne farbige Ränder erschien. Die Parallelität des austretenden Lichtes wurde durch Autokollimation erreicht. Die Ringblende im Brennpunkt des zweiten Objektivs wurde dann so justiert, daß das Bild der Lochblende vollständig ausgeblendet war, auf dem Schirm also ein Dunkelfeld entstand. Die Größe der Ringblende hängt ab von der jeweiligen Frequenz und der zu benutzenden Beugungsordnung. Die gut gepolsterte Küvette, in der der an einem Halter befestigte Quarz in die umgebende Flüssigkeit — *m*-Xylol oder Benzol — abstrahlen konnte, wurde zwischen den beiden Objektiven auf einem horizontalen Tischchen drehbar angebracht.

Bezeichnet man die Lichtrichtung mit x, die Vertikale mit z und die dazu senkrechte Richtung, in die der Schall abgestrahlt wird, mit y, so muß der Quarz einmal parallel zur x—z-Ebene und zum anderen parallel zur x—y-Ebene eingestellt werden. Richtige oder falsche Stellung des Schallgebers konnte aus den Bildern auf dem Schirm beurteilt werden. War der Quarz richtig justiert und wurde er um die z-Achse gedreht, so änderte sich das Bild so, als ob die angelegte Spannung und damit die Schallintensität verkleinert würde. Haupt- und Nebenmaxima verschwanden gleichmäßig. Wird der Quarz um einen kleinen Winkel aus der x—y-Ebene herausgedreht und dann wieder wie oben um z, so verschwinden bei dieser Drehung Haupt- und Nebenmaxima nicht mehr gleichmäßig. Abb. 5a zeigt das Schallfeld eines um einen kleinen Winkel gegen x geneigten Quarzes. Abb. 5b zeigt die Unsymmetrie der Abstrahlung nach Drehung um einen Winkel von $0^0\,29'$ um z. Auf diese Weise konnten noch Neigungen des Quarzes von $0^0\,5'$ gegen die x—y-Ebene festgestellt werden.

Der Quarz wurde so lange um y gedreht, bis bei Drehung um z ein symmetrisches Verschwinden des Bildes zu beobachten war. Dann wurde auf das Maximum der Abstrahlung eingestellt, so daß die Schallwellenfronten parallel zum einfallenden Licht verlaufen. Nach der Justierung wurde durch Rühren in der Flüssigkeit ein Temperaturausgleich hergestellt und die Temperatur auf $^1/_{10}{}^0$ C bestimmt. Das Schallfeld wurde photographiert und im Anschluß daran sogleich die Frequenz gemessen. Abb. 6 zeigt die Abstrahlung bei drei verschiedenen Verhältnissen von D/λ in Xylol, und zwar a) für 4,08, b) für 10,38 und c) für 25,71.

Aus der Schallgeschwindigkeit, die für Xylol bei 25° C mit großer Genauigkeit zu 1321,37 m/sec gemessen worden war, und der Frequenz wurde das Verhältnis D/λ berechnet. Die Winkel, welche die Richtungen der Intensitätsminima mit der Senkrechten auf dem Quarz bilden, wurden mittels

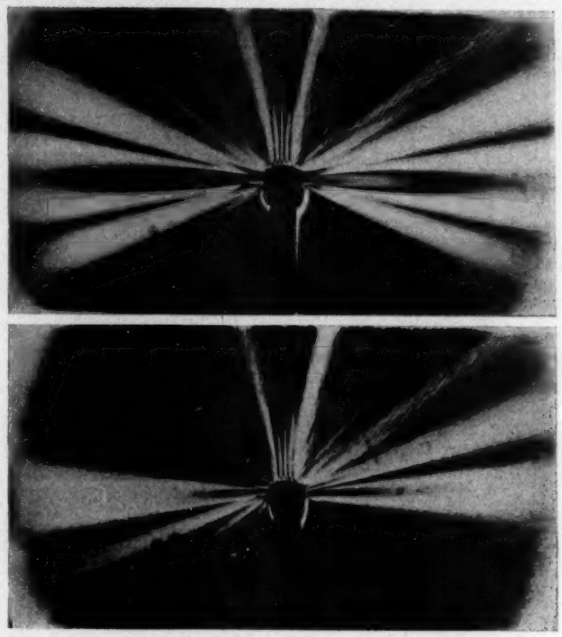

Abb. 5. Bild des Schallfeldes bei nicht genauer Orientierung des Quarzes

eines Winkelmessers von 15 cm Durchmesser mit 10′-Teilung gemessen. Photographisches Negativ und Kreisteilung wurden fest aufeinandergelegt, so daß der Membranmittelpunkt mit dem O-Punkt und die Normale auf der Quarzoberfläche mit der 90°-Richtung zusammenfielen. Dann wurde eine in eine dünne Glasplatte geritzte gerade Linie um den Nullpunkt in die Richtung der Minima gedreht und die zugehörigen Winkel mit der Lupe abgelesen. Von den nach beiden Seiten gemessenen Winkeln wurde das arithmetische Mittel genommen.

Diskussion der Meßergebnisse

Für die Frauenhofersche Beugung am Spalt, also für einfallende ebene Wellen und große Aufpunktabstände, ergibt sich aus der Kirchhoffschen Theorie folgende Formel für die Intensität

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin\varphi\right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \sin\varphi} \right]^2,$$

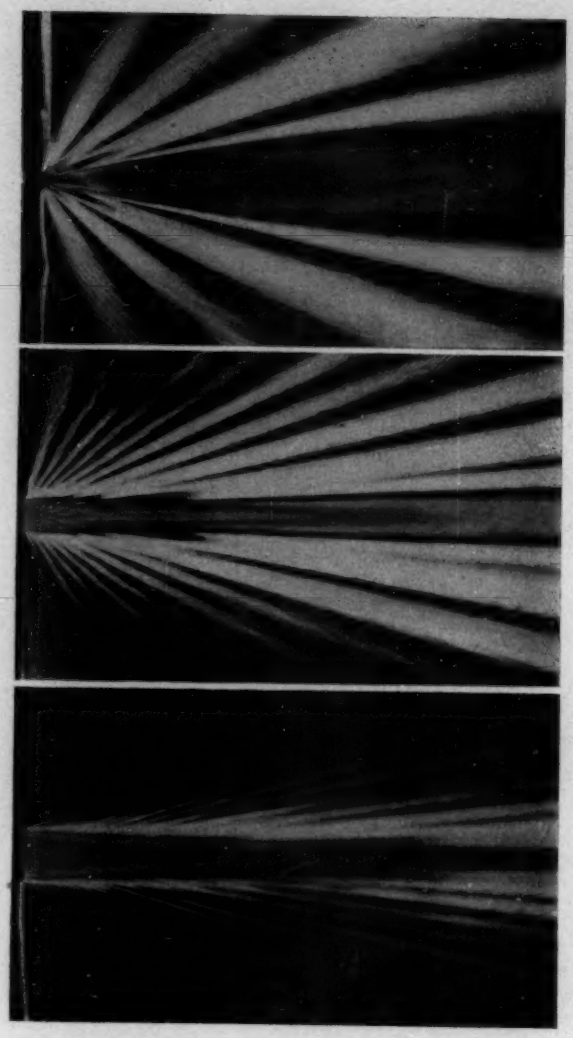

Abb. 6. Amplitudenfelder vor Quarzen für verschiedene Werte von D/λ. a) $D = 4{,}08\ \lambda$; b) $D = 10{,}38\ \lambda$; c) $D = 25{,}71\ \lambda$

wo I_0 die Intensität in der Richtung senkrecht zum Spalt ist. D = Spaltbreite, λ = Wellenlänge, φ = Beugungswinkel.

Für $I_0 = 1$ und $\frac{\pi D}{\lambda} \sin\varphi = z$ geht die Formel über in: $I = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$. Die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ wird 0, wenn $z = n \cdot \pi$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ außer 0. Die Winkel der Intensitätsminima sind demnach bestimmt durch $\sin\varphi = \frac{n}{D/\lambda}$. Die Maxima der Funktion ergeben sich aus der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} z = z$. Die genauen Werte für die Wurzeln dieser Gleichung sind von SCHWERD[26]) und LOMMEL[27]) berechnet worden.

Eine exakte Behandlung der Beugung des Lichtes an einem Spalt mit unendlich langen parallelen Kanten stammt von SCHWARZSCHILD[28]). Er geht dabei aus von der exakten und vollständigen Lösung des Problems der Beugung an einem geraden Rand, wie sie SOMMERFELD[29]) gegeben hat. Die SCHWARZSCHILDsche Formel für die Intensitätsverteilung ist nur für große Spaltbreiten im Verhältnis zur Wellenlänge auswertbar und weicht etwas von der KIRCHHOFFschen Formel ab. Für die Richtungen der seitlichen Maxima und Minima ergeben sich jedoch die gleichen Winkel.

In Tabelle I sind die gemessenen Winkel für die Intensitätsminima und die aus der KIRCHHOFFschen Formel berechneten gegenübergestellt. Die Winkel wurden auf $\pm 10'$ gemessen. Die Abweichung zwischen den gemessenen und den theoretischen Werten beträgt durchschnittlich 1—2%.

Das Schallfeld in unmittelbarer Nähe des Quarzes

FRESNELsche Beugungserscheinungen

Die Betrachtung des Schallfeldes in der Nähe des Quarzes führt nach optischen Analogien in das Gebiet der FRESNELschen Beugungserscheinungen. Hier nimmt bei Spalten, die enger als die Wellenlängen sind, die Intensität des gebeugten Lichtes mit den Winkelabständen vom Zentralstrahl stetig ab. Das durchgelassene Licht ist diffus. Wird die Spaltbreite größer, so treten im geometrischen Schatten Minima und Maxima der Intensität auf, die als zu den Spalträndern parallele, abwechselnd helle und dunkle Beugungsstreifen erscheinen. Wird der Spalt noch breiter, so treten auch innerhalb des geometrischen Spaltbildes Beugungsstreifen auf. Die Zahl und Lage dieser Maxima und Minima

[26]) F. M. SCHWERD, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835.

[27]) E. v. LOMMEL, Abh. bayr. Akad. Wiss. 15 (1886), S. 531.

[28]) K. SCHWARZSCHILD, Math. Ann. 55 (1902), S. 177.

[29]) A. SOMMERFELD, Math. Ann. 47 (1896), S. 317.

Tabelle I

Richtungen der Intensitätsminima vor stabförmigen Schallquellen verschiedener Breite, gemessene und berechnete Werte

		D/λ=4,08	5,70	7,33	8,31	11,69	14,30	15,76	17,60	25,71
I. Min.	exp.	14° 30′	10° 20′	7° 45′	6° 50′	4° 55′	3° 50′	3° 20′	3° 10′	2° 10′
	theoret.	14° 11′	10° 6′	7° 50′	6° 55′	4° 55′	4° 1′	3° 38′	3° 16′	2° 11′
II. „	exp.	29° 30′	20° 25′	16° 15′	14° 10′	9° 50′	8° 5′	7° 20′	6° 25′	4° 30′
	theoret.	29° 21′	20° 32′	15° 50′	13° 56′	9° 51′	8° 2′	7° 17′	6° 31′	4° 28′
III. „	exp.	47° 50′	32° 20′	23° 55′	21° 25′	15° 35′	12° 15′	11° 20′	9° 50′	6° 45′
	theoret.	47° 19′	31° 45′	24° 10′	21° 10′	14° 52′	12° 7′	10° 58′	9° 49′	6° 42′
IV. „	exp.		45°	33° 25′	28° 40′	20° 10′	16° 13′	14° 35′	13° 5′	9° 5′
	theoret.		44° 34′	33° 5′	28° 47′	20° 1′	16° 15′	14° 42′	13° 8′	8° 57′
V. „	exp.		62° 15′	42° 5′	37° 20′	25° 35′	20° 37′	19°	16° 25′	11° 10′
	theoret.		61° 18′	43° 1′	37°	25° 20′	20° 28′	18° 30′	16° 30′	11° 13′
VI. „	exp.			54°	46° 25′	31° 20′	24° 50′	22° 50′	19° 40′	13° 40′
	theoret.			54° 57′	46° 14′	30° 53′	24° 49′	22° 23′	19° 56′	13° 30′
VII. „	exp.				58°	37° 5′	29° 25′	26° 50′	23° 55′	16° 5′
	theoret.				57° 23′	36° 47′	29° 19′	26° 22′	23° 26′	15° 48′
VIII. „	exp.					43° 15′	34°	30° 50′	27° 5′	18° 10′
	theoret.					43° 11′	34° 2′	30° 30′	27° 2′	18° 8′
IX. „	exp.					50° 25′	39° 12′	35° 10′	30° 55′	20° 35′
	theoret.					50° 20′	39°	34° 49′	30° 45′	20° 30′
X. „	exp.						44° 25′	40°	35°	23° 15′
	theoret.						44° 23′	39° 23′	34° 38′	22° 54′

ändert sich nicht nur mit der Spaltbreite, sondern auch mit der Entfernung vom Spalt.

Während man im optischen Fall die Intensitätsverteilung jeweils nur in einer Ebene parallel zum Spalt beobachten kann, läßt sich für ein gegebenes Verhältnis D/λ das gesamte Schallfeld übersehen. R. W. Boyle hat — wie schon erwähnt — wohl zuerst versucht, mittels seiner Staubfigurenmethode das Schallfeld unmittelbar vor dem Schallgeber sichtbar zu machen, da die Berechnungen der Intensitätsverteilung im Schallfeld die Punkte innerhalb einer Entfernung von $D/2$ nicht erfassen. Mit Torsionspendel konnte er Maxima und Minima direkt vor dem Quarz feststellen. Er benutzte Quarzmosaike zwischen Stahlplatten, die nur angenähert kolbenförmig schwangen und erhielt daher eine unsymmetrische Verteilung. Die optische Methode ermöglicht eine ungleich genauere Untersuchung. Abb. 7 zeigt Schallfelder unmittelbar vor dem Quarz bei verschiedenen D/λ, und zwar a) $D/\lambda = 8{,}31$, b) $= 10{,}38$, c) $= 14{,}36$ (a und b in Xylol, c in Benzol). Man sieht, wie sich die Erscheinung mit wachsendem Verhältnis D/λ wie auch mit wachsendem Abstand vom Schallgeber ändert. Die hellen Stellen sind die Maxima und die dunklen die Minima. Diese Punkte liegen auf Parabeln und Hyperbeln. Es ist sogleich zu erkennen, daß die Zahl der Maxima direkt vor dem Quarz, die in den geometrischen Schattenraum austretenden Nebenmaxima, wie auch der Abstand vom Beginn des Hauptmaximums bis zum Quarz mit wachsendem D/λ zunimmt. Ich habe versucht, diese Intensitätsverteilung im Schallfeld geometrisch darzustellen und zu diesem Zweck eine Annahme gemacht, die in der Optik auf Th. Young[30]) zurückgeht. Dieser betrachtete die Beugungserscheinungen als Interferenz zwischen dem ungestörten Licht und einer vom beugenden Rand sich loslösenden Beugungswelle. Sommerfeld hat — wie schon erwähnt — eine exakte Lösung des Problems der Beugung an einer Halbebene gegeben. Seine erhaltenen Formeln stellen die Lichtbewegung dar als eine Überlagerung der

[30]) Th. Young, London Phil. Trans. 12 u. 387 (1802).

einfallenden ebenen Welle mit einer sich senkrecht von der Kante ausbreitenden Zylinderwelle. Man kann die Beugungserscheinung an einem Spalt oder wie in vorliegendem Fall vor kolbenförmig schwingenden Membranen demnach auffassen als das Ergebnis der Superposition von einfallender ebener Welle und den

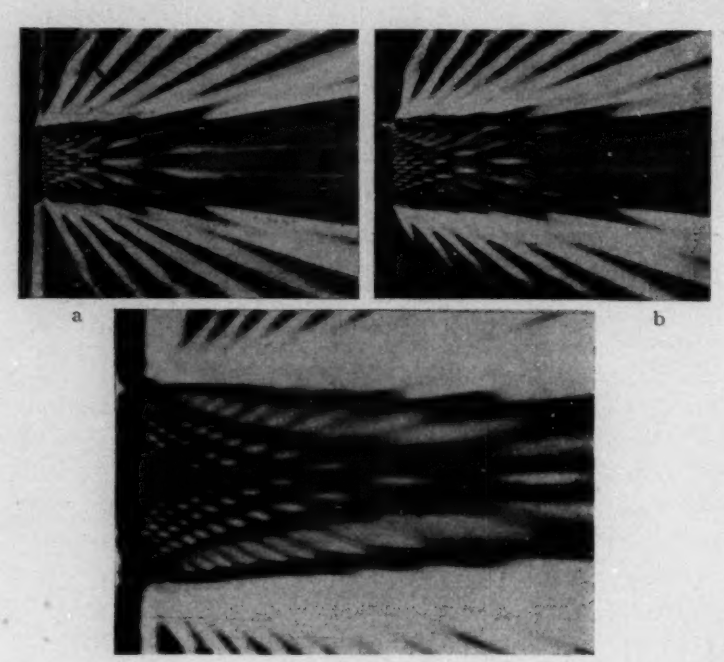

Abb. 7. Schallinterferenzerscheinung unmittelbar vor dem Quarz. a) $D = 8{,}31\ \lambda$; b) $D = 10{,}38\ \lambda$; c) $D = 14{,}36\ \lambda$

von den Kanten ausgehenden Zylinderwellen. Die FRAUENHOFERsche Beugungserscheinung außerhalb der nullten Ordnung ist demnach das Produkt der Interferenz der beiden Zylinderwellen, während bei der FRESNELschen Beugung alle drei Wellensysteme zusammenwirken. In Abb. 8 sind für einen Schallgeber der Breite $8\ \lambda$ die Wellenlinien der Ebenen- und Zylinderwellen dünn eingezeichnet, und zwar bedeuten die ausgezogenen Linien Wellenberge, die gestrichelten Wellentäler. Verbindet man alle Punkte, deren Gangunterschied gleichgroß ist, so ergeben sich zwei Scharen konfokaler Parabeln und eine Schar konfokaler Hyperbeln mit den Randpunkten des Quarzes als gemeinsamen Brennpunkten. Die Parabeln entstehen als Überlagerung einer Ebenen- und einer Zylinderwelle, die Hyperbeln aus beiden Zylinderwellen. In der Abbildung sind diejenigen Parabeln eingezeichnet, bei denen die Schwächung maximal ist, auf denen sich also die Intensitätsminima bewegen. Die sich ergebende Intensitätsverteilung stimmt mit den Verhältnissen im Schallfeld, wie ein Vergleich mit Abb. 7 zeigt, gut überein. Die Anzahl der Punkte maximaler Intensität vor dem Quarz und die der in den Schattenraum

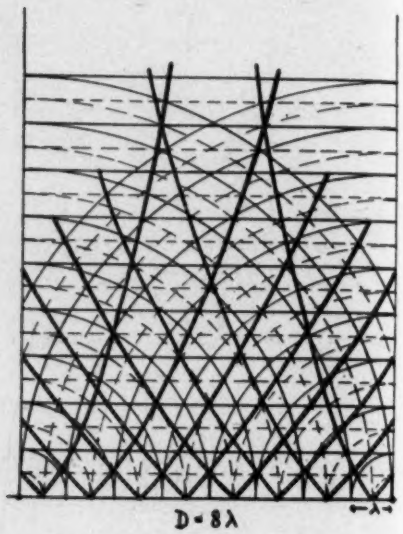

Abb. 8. Überlagerung zweier Zylinder- und einer ebenen Welle (schematisch)

austretenden Maxima ist gleich dem Verhältnis D/λ. Der Vergleich ergibt jedoch auch, daß die Form der einzelnen Felder nicht übereinstimmt. Um eine genaue Rekonstruktion des Schallfeldes zu erhalten, müssen auch die Hyperbeln berücksichtigt werden. Diese ändern nichts an der Lage der einzelnen Punkte, sondern verändern nur die Form. In Abb. 9 sind die Parabeln und Hyperbeln maximaler Schwächung eingezeichnet. Letztere schneiden von den Maxima, die durch die Parabeln begrenzt werden, kleine Dreiecke ab. Wenn man die Mittelpunkte derselben als Punkte kleinster Intensität betrachtet und sie miteinander verbindet, so teilen diese Linien — in Abb. 9 dick gezeichnet — das Schallfeld in der aus den Photographien erkennbaren Weise auf. Die

geometrische Darstellung ergibt so eine bis ins einzelne getreue Wiedergabe des Strahlungsfeldes. Die gleichen Interferenzen wurden vor Spalten beobachtet. Abb. 10 zeigt das Schallfeld vor einer Spaltblende für $D/\lambda = 12{,}57$. Um vollkommen schallundurchlässige und doch dünne Spaltbacken zu erhalten, wurden dieselben aus sehr dünner, mehrfach gefalteter Kupferfolie hergestellt.

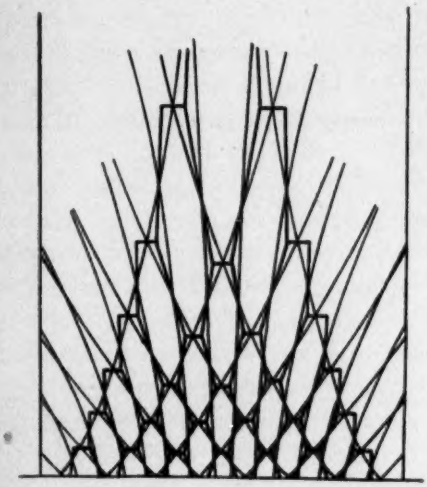

Abb. 9. Schematische Darstellung der Interferenzerscheinung unmittelbar vor dem Quarz

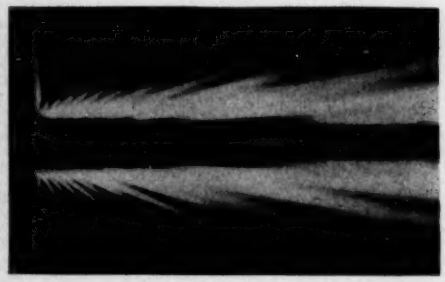

Abb. 10. Interferenzerscheinung vor einem Spalt der Breite 12,57 λ

Eine Berechnung der Lage der Maxima und Minima auf der Mittelsenkrechten gestaltet sich unter obigen Voraussetzungen sehr einfach. Um die Parabel der ersten Intensitätsmaxima und den Abstand ihres Schnittpunktes mit der Y-Achse — Abb 11 — vom Nullpunkt zu berechnen, lege ich das Koordinatensystem so, daß die x-Achse in der Membranoberfläche liegt und die positive y-Achse die Schallfortpflanzungsrichtung angibt. Die Koordinaten der Begrenzung seien $(c, 0)$ und $(-c, 0)$.

Die Gleichung der Kreise lautet:

$$(x - c)^2 + y^2 = (n R)^2;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Die Maxima liegen auf dem ersten Kreis und der nullten Geraden, dem zweiten Kreis und der ersten Geraden, dem n-ten Kreis und der $(n-1)$-ten Geraden. Aus $y = (n-1)\,R$ und obiger Gleichung ergeben sich die beiden Parabeln: $(x \pm c)^2 = 2\,y\,R + R^2$. Der Abstand des ersten Maximums des Interferenzfeldes vom Quarz ist dann:

$$y = \frac{c^2 - R^2}{2R} = \frac{D^2 + 4\lambda^2}{8\lambda}\ (R = \lambda,\ c = D/2)\,.$$

Das Verhältnis von y zur Spaltbreite D ist:

$$y/D = \frac{1}{8}\frac{D}{\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{D}\,.$$

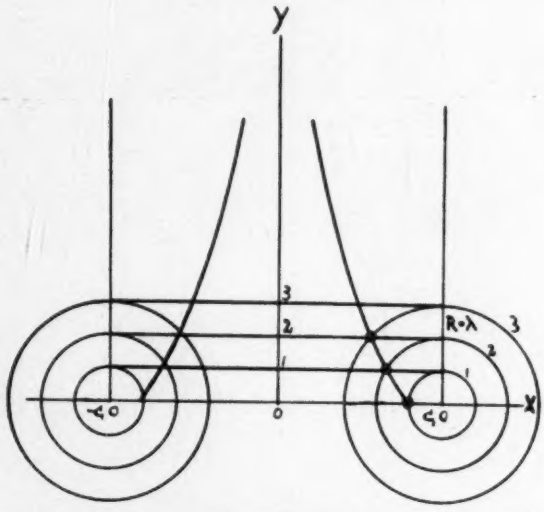

Abb. 11. Schema zur elementaren Berechnung der Interferenzpunkte

Wenn $D/\lambda = 8$, so muß y nahezu gleich D sein. In Tabelle II sind für verschiedene D/λ die berechneten und gemessenen Werte von y/D gegenübergestellt. Die Meßgenauigkeit beträgt $\pm 6\%$. Die Abweichungen von den theoretischen Werten überschreiten nicht die Fehlergrenzen. Um auch Absolutmessungen vornehmen zu können, wurde bei allen Aufnahmen eine 10 mm breite Meßmarke mitphotographiert. Führt man die Rechnung auch für die andern Parabeln durch, so ergibt sich

Tabelle II

Lage des letzten Intensitätsmaximums der Interferenzfigur unmittelbar vor der Schallquelle. Gemessene, berechnete Werte für verschiedene Schallgeber

D/λ	berechnet y/D	gemessen
6,1	0,68	0,72
7,3	0,84	0,89
8,3	0,98	0,97
8,4	0,99	0,96
8,7	1,04	1,03
10,4	1,25	1,32
11,2	1,35	1,40
11,7	1,46	1,50
14,2	1,76	1,78
15,0	1,85	1,89
17,6	2,18	2,29
17,8	2,21	2,29
18,7	2,32	2,22
25,7	3,19	3,16

allgemein für y:

$$y = \frac{D^2 - n^2 \cdot \lambda^2}{n \cdot 4\,\lambda}, \quad \text{Minima für } n = 1, 3, 5, \ldots,$$

Maxima für $n = 2, 4, 6, \ldots$

Backhaus und Trendelenburg erhielten aus dem Rayleighschen Ansatz für das Geschwindigkeitspotential die Formel für die vollständige Auslöschung auf der Achse einer runden Membran:

$$Z_0 = \frac{\frac{R^2}{\lambda^2} - n^2}{\frac{2\,n}{\lambda}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Unsere Formel kann geschrieben werden:

$$y = \frac{\frac{D^2}{\lambda^2} - n^2}{\frac{4\,n}{\lambda}}.$$

Beide Formeln sind von gleichem Bau und unterscheiden sich nur um den Faktor $\frac{1}{2}$; für R steht D.

Es können auf der Achse nur solange Maxima und Minima entstehen, als $n < \frac{D}{\lambda}$ ist. Je größer $\frac{D}{\lambda}$, um so mehr Interferenzpunkte treten auf.

Der Intensitätsverlauf im Schallfeld. Isochromaten

Während wir bisher nur etwas über die Intensitätsmaxima und -minima bezüglich ihrer Lage und Richtung aussagen konnten, ermöglicht es die Methode der Isochromaten einen genauen Überblick über die Intensitätsverteilung zu erhalten. Die Versuchsanordnung ist die gleiche; nur wird das nicht abgebeugte Licht zur Abbildung benutzt, an die Stelle der Ringblende tritt eine Lochblende. Da es bei der Methode auf eine genaue Ausblendung ankommt, um reine Farben zu erhalten, wurden meist Spalte benutzt. Bei diesen werden Richtungen, die unter einem spitzen Winkel verlaufen, benachteiligt. Durch Vergleich von Aufnahmen, die mittels Lochblende und Spalt hergestellt waren, konnte aber kein Unterschied festgestellt werden. Das mag seinen Grund darin haben, daß die benutzten Spalte nicht sehr schmal waren.

Benutzt man weißes Licht, so zeigt sich das Schallfeld aus verschiedenen Linien gleicher Farbe zusammengesetzt. Photographiert man ein solches Bild mit Schwarz-Weiß-Platten, so entsteht infolge der verschiedenen Empfindlichkeit der Emulsion für die einzelnen Farben ein Bild, wie es Abb. 12 zeigt. Die Breite des

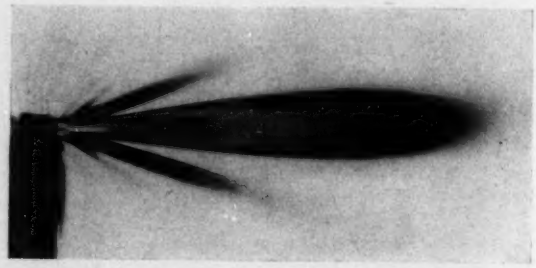

Abb. 12. Schallfeld eines Quarzes in Benzol für $D/\lambda = 4{,}2$

Quarzes, der in Benzol abstrahlt, beträgt 4,2 λ. Die verschiedenen Farben haben ungleiche Schwärzung der Platte hervorgerufen. Bei Benutzung monochromatischen Lichtes wird das Bild wesentlich vereinfacht und man erhält einen besseren Einblick in den Vorgang. Abb. 13 a und b zeigt das Schallfeld des gleichen Quarzes ($D = 4{,}2\ \lambda$) in Xylol bei der gleichen Schallintensität. Als Lichtquelle diente eine Quecksilberdampflampe mit Zeiß-Monochromat-Filtern. Diese gestatteten, die Wellenlängen 5641 ÅE (grün) und 5769 ÅE (gelb) auszusondern. Für a wurde grünes

und für b gelbes Licht verwandt. Die Aufnahmen zeigen, daß das Licht nur für ganz bestimmte Schallintensitäten stärker aus der nullten Ordnung weggebrochen wird. Die verschiedenen Farben entsprechen verschiedenen Intensitäten. Es besteht also, wie ja auch aus der Theorie über die Lichtbeugung an Schallwellen bekannt ist, ein funktionaler Zusammenhang zwischen Schallintensität und Lichtwellenlänge. Bei weißem Licht wird demnach für jede Intensität, die jedoch einen kleinsten Wert nicht unterschreiten darf, eine bestimmte Farbe bevorzugt aus der Nullten weggebrochen und es wird die komplementäre sichtbar. In dem Bild des Schallfeldes stellen die Linien gleicher Farbe Orte gleichen Schalldrucks dar. Man erhält also mit weißem Licht einen vollständigen Überblick über die Intensitätsverteilung vor dem Schallgeber.

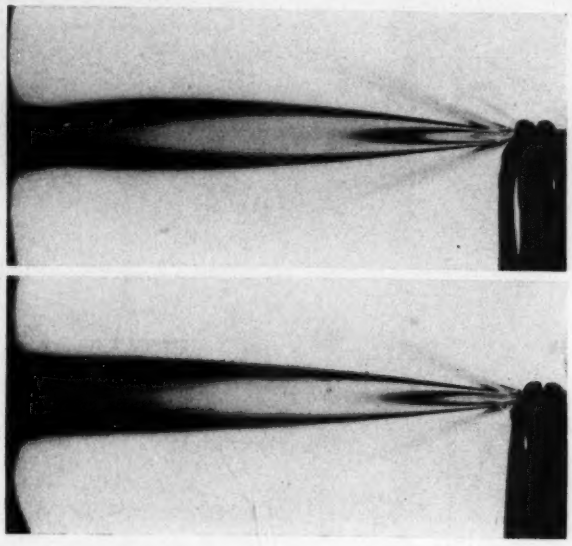

Abb. 13. Abbildung des Schallfeldes bei Benutzung monochromatischen Lichtes.
a) grün 5641 ÅE, b) gelb 5769 ÅE

Abb. 14a und b zeigt Schallfelder des gleichen Quarzes — $D = 7{,}5\ \lambda$ — in Flüssigkeiten verschiedener Absorption. Im ersten Fall strahlt der Quarz in Xylol mit einem Quarzstrom von 240 mA. In Benzol (b) ist die Absorption bedeutend größer, so daß man noch bei viel höherer Intensität, Quarzstrom 300 mA, geschlossene Isochromaten erhält.

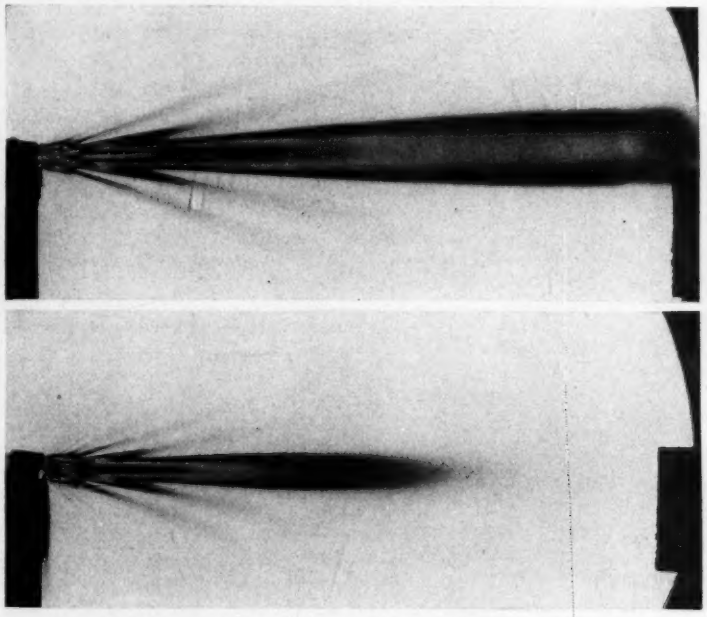

Abb. 14. Schallfelder des gleichen Quarzes in Flüssigkeiten verschiedener Schallabsorption.
a) Xylol, b) Benzol

Nun geht aus den Aufnahmen nicht hervor, welche Farben größerer und welche kleinerer Intensität entsprechen. Dies läßt sich durch eine „Analyse" des Schallfeldes feststellen. Mit wachsender Schallintensität wird das Licht in immer höhere Ordnungen aus der Nullten weggebeugt. Benutzt man also nacheinander die verschiedenen Ordnungen, so wird schließlich nur noch die Stelle höchster Intensität zu erkennen sein. Abb. 15 zeigt die Abstrahlung eines Quarzes in Xylol: a) mit der nullten, b) mit der zweiten Ordnung aufgenommen.

Zusammenfassung

Die Abstrahlung von kolbenförmig schwingenden Quarzen wird optisch untersucht. Die Winkel, die die Intensitätsminima mit der

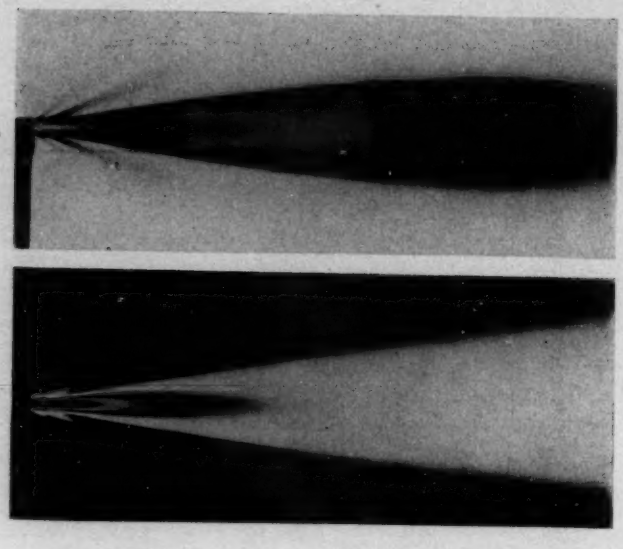

Abb. 15. Abbildung des Schallfeldes bei Benutzung verschiedener Beugungsordnungen

Senkrechten auf einem Strahler bilden, werden gemessen. Experimentell ermittelte und aus der KIRCHHOFFschen Formel für die Intensitätsverteilung bei der Beugung am Einzelspalt berechnete Werte stimmen innerhalb von 1—2% überein.

Für die bei großen Verhältnissen von D/λ unmittelbar vor dem Quarz auftretenden Interferenzerscheinungen wird unter Zugrundelegung einfacher und naheliegender Annahmen eine geometrische und rechnerische Darstellung gegeben, die gut mit den Verhältnissen im Schallfeld übereinstimmt.

Mittels einer neuen Methode wird der Intensitätsverlauf im Schallfeld untersucht. Die Kurven gleichen Schalldrucks erscheinen als Linien gleicher Farbe.

Herrn Prof. Dr. E. HIEDEMANN, der die Anregung zu der Arbeit gegeben hat, habe ich für viele Ratschläge und Hinweise zu danken. Dem Direktor des Institutes, Herrn Prof. Dr. F. KIRCHNER, danke ich für sein Interesse. Der Helmholtz-Gesellschaft und auch der Johann-Hamspohn-Stiftung an der Universität Köln bin ich zu besonderem Dank verpflichtet, da sie durch Bereitstellung von Mitteln die Durchführung der Arbeit ermöglicht haben.

(Eingegangen am 21. September 1940.)

Elektrisch verbesserte Raumakustik

Mitteilung aus dem Institut für Hochfrequenztechnik und Elektroakustik der Technischen Hochschule Hannover

Von Oskar Vierling

(Mit 16 Textabbildungen)

In der Staatsoper Unter den Linden in Berlin sollten wieder Symphoniekonzerte veranstaltet werden. Eine Wiederaufnahme dieser Konzerte schien nur dann lohnend, wenn die ungünstigen akustischen Verhältnisse der Staatsoper vollkommen gebessert waren[1]). Der repräsentative Zuschauerraum mit seiner Ausstattung in Rot und Gold ist überreich an Stuck und Samt. Es finden sich in ihm keinerlei glatte Flächen, die den auf sie treffenden Schall reflektieren könnten. So kommt es, daß der Nachhall sehr kurz ist und der Musik deshalb weiche Übergänge und der harmonische Zusammenklang fehlen. Orchesterschläge wirken abgehackt und die Klänge der einzelnen Instrumentalgruppen mischen sich schlecht. Dieser fehlende Nachhall wirkt sich für den Hörer noch nicht so nachteilig aus wie eine andere Tatsache, die durch die vielen Samtpolster und Verkleidungen verursacht ist. Der weiche Stoff verschluckt im besonderen Maße die hohen Obertöne, so daß man einen Eindruck

[1]) Die Akustik des Hauses ist für Opernaufführungen sehr gut und hat da kaum ihresgleichen.

erhält wie bei den ersten Rundfunksenderäumen, wo man zur Dämpfung nur mit Stoffen gearbeitet hat. Dem Orchester fehlt jeder Glanz, und besonders wird der edle Geigenklang stumpf und unschön und die Streichergruppen kommen nicht mehr zur Wirkung; sie werden leicht durch die anderen Instrumente verdeckt. Bei früheren Konzerten hat man das Orchester erst in den Zuschauerraum gestellt und dann wieder auf die Bühne; aber keins von beiden brachte die gewünschte Besserung. Es mußten also weitergehende Maßnahmen getroffen werden.

Man stellte das Orchester im Zuschauerraum auf und brauchte noch einen etwa 4 m breiten Streifen der Bühne dazu, um auch bei stärkster Besetzung genügend Raum zu haben. Zur Bühne war ein Abschluß durch eine Kulisse geschaffen worden, die architektonisch dem Gesamtbild angepaßt war. Das Orchesterpodium stieg in verhältnismäßig steilen Stufen zu diesem Abschluß hin von einer Höhe von 60 cm über dem Parkett bis zu einer Höhe von 2,30 m an. Die Stufen waren nach den Seiten zu halbkreisförmig nach vorn geführt. Durch den steilen Aufbau sollte schon den einzelnen Instrumentengruppen eine solche Lage gegeben werden, daß der direkte Schall möglichst alle Plätze des Theaters erreicht. Die erste Probe zeigte nun, daß gegenüber den früheren Verhältnissen kaum eine Verbesserung erreicht war.

Es lag nun der Gedanke nahe, durch einfache bauliche Maßnahmen Abhilfe zu schaffen. Innerhalb des Zuschauerraumes darf nicht das geringste geändert werden, da er unter Denkmalschutz steht. Es blieb also nur die Möglichkeit, den Zuschauerraum nach der Bühne hin akustisch günstig auszubauen, um durch entsprechende geometrische Anordnung reflektierender Flächen den Schall über den Raum besser zu verteilen. Es wurde zuerst an einen muschelartigen Bau gedacht. Bei der genaueren Prüfung an Hand der Grund- und Aufrißzeichnungen ergab sich aber, daß wegen der geringen Höhe den einzelnen Flächen nicht die erforderliche Neigung gegeben werden konnte. Dieser Weg schied deshalb aus.

Die einzige bauliche Maßnahme, die durchgeführt wurde, bestand darin, daß der Saalabschluß, der nur aus ganz dünnem Sperrholz ausgeführt war, verstärkt wurde, z. T. Metallbeschlag erhielt, so daß er tatsächlich eine volle reflektierende Wand und einen Abschluß des Zuschauerraums vom Bühnenraum darstellte. In Abb. 1 ist schematisch der Querschnitt durch die Staatsoper mit dem Orchesteraufbau und dem Saalabschluß dargestellt. Man sieht daraus, daß der obere Bühnenabschluß, der nur bis zu einer gewissen Höhe hochgefahren werden kann, das Haupthindernis für ausreichende bauliche Maßnahmen ist.

Eine zweite Konzertprobe zeigte nun, daß die starre Rückwand schon eine gewisse Wirkung hatte und daß Änderungen in der Orchestergruppierung, insbesondere in bezug auf die Stellung zu dieser Rückwand, hörbare Verbesserungen ergaben. Nicht vorteilhaft beeinflußt wurden die Streicher, die zu weit von der Rückwand weg saßen. Es fehlten immer noch die hohen Obertöne, und auch der Nachhall war durch diese im Vergleich zur Gesamtfläche des Innenraumes kleine reflektierende Wand nicht größer geworden. Es blieb also nur übrig, auf gänzlich anderem Wege

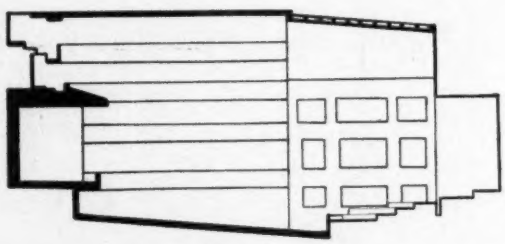

Abb. 1. Schematischer Querschnitt durch die Staatsoper

hier vorzugehen, wenn man zu wirklichen Erfolgen gelangen wollte.

Aus der Erfahrung, daß es vorteilhaft ist, Klangfarben bei elektroakustischer Wiedergabe dem Raum anzupassen, d. h. den Raum schon bei der Erzeugung von Klangfarben zu berücksichtigen, sollte nun dieses Verfahren in abgewandelter Form hier angewandt werden. Die Aufgabe war, die geschwächten hohen Obertöne, insbesondere der Streicher, anzuheben

und den Nachhall zu verlängern. Das Problem erschien nicht ganz einfach, da es sich um eine hochwertigste musikalische Aufführung handelt, wo auch nicht im geringsten eine Qualitätseinbuße auftreten darf. Außerdem darf das Gesamtklangbild auch in bezug auf seine räumliche Wirkung nicht verfälscht werden. Der ersten Forderung wurde dadurch entsprochen, daß nur eine ganz hochwertige Übertragungsanlage benutzt wurde. Die zweite Forderung wurde dadurch erfüllt, daß zwei voneinander getrennte Anlagen auf beiden Seiten des Orchesters aufgestellt wurden. Die beiden verwendeten Mikrophone waren Kondensatormikrophone mit nierenförmiger Richtcharakteristik, um einerseits nur einen bestimmten Teil, und zwar die linke oder die rechte Streichergruppe des Orchesters zu erfassen, andererseits um die Rückkoppelung von den Lautsprechern zu vermeiden, die dicht benachbart auch links und rechts bei den Streichern angeordnet waren. Die beiden Verstärkeranlagen brauchten nur die hohen Obertöne zu bringen, und es war deshalb eine Entzerrung eingeschaltet, die nach hohen Frequenzen hin in steigendem Maße durchläßt. In Abb. 2 sind die

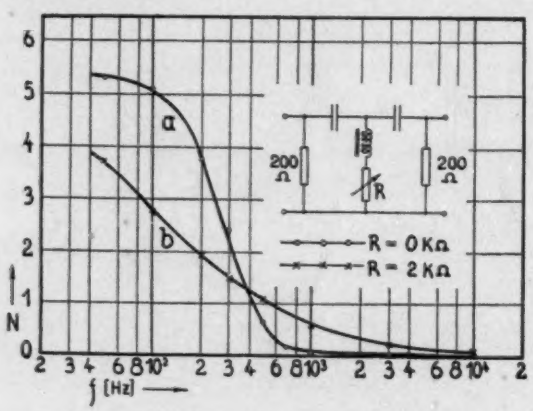

Abb. 2. Schaltung und Durchlaßkurven des Entzerrers. Kurve *b* wurde verwendet

Schaltung und Durchlaßkurven gezeichnet. Verwendet wurde die Kurve *b* mit einem eingeschalteten Widerstand $R = 2000\ \Omega$. Bei den Lautsprechern war nun nicht nur darauf zu achten, daß die hohen Obertöne gebracht wurden, sondern insbesondere darauf, daß durch eine möglichst ungerichtete Schallstrahlung sowohl ein großer Teil des Zuschauerraumes bestrichen wurde, aber auch umgekehrt der Standort der Lautsprecher nicht zu hören war. Die unangenehme Richtwirkung, die sich bei Lautsprechern für hohe Töne einstellt und gebündelte Schallstrahlen ergibt, wurde durch die Anbringung von Zerstreuungskegeln vermieden. Außerdem wurde die Zahl von drei Lautsprechern auf jeder Seite gewählt, die dann noch eine verschiedene Orientierung zum Zuschauerraum erhielten. Der Verstärker hatte eine Leistung von 20 Watt und hatte im Fortissimo eine Ausgangsspannung von 50 Volt an 140 Ω, also eine Leistung von etwa 18 Watt.

Die Wirkungsweise zeigte folgender Versuch, der bei der Prüfung der Anlage angestellt wurde. Ein auf einem Schlüssel gepfiffener Ton hörte sich aus dem Lautsprecher ziemlich mißglückt an, denn es kam nur ein sehr schwacher Ton mit einem erheblichen Blasgeräusch heraus. Die Töne hoher Frequenz, die im Blasgeräusch enthalten sind, werden durch die Anlage so stark angehoben, daß der eigentliche Ton von wesentlich tieferer Frequenz demgegenüber zurücktritt.

Durch diese Verstärkeranlage wurden also nur die Töne hoher Frequenz angehoben, der Gesamtklang aber nicht verstärkt. Dabei brauchen wir als hohe Frequenzen nicht nur die Geräuschkomponenten aufzufassen, wie z. B. den Strich bei den Geigen. Wir haben darunter auch nicht nur die hohen Teiltöne der Streicherklänge zu verstehen, sondern es können auch die Grundtöne in den Verstärkungsbereich fallen, wenn es sich um das Spiel in hohen Lagen handelt.

Damit war nun eine Anlage geschaffen, um die zu große Dämpfung der Töne hoher Frequenz auszugleichen.

Nun mußte noch das zweite Übel, der zu geringe Nachhall, beseitigt werden. Beim Rundfunk verwendet man schon seit langem sog. Nachhallräume, um dem Rundfunksenderaum verschiedenen Charakter in bezug auf den Nachhall verleihen zu können. Der Orchesterklang wird direkt auf den Sender gegeben und hat dabei die gleiche Beschaffenheit wie im Senderaum. Von dieser Leitung wird nun abgezweigt

und über einen Verstärker ein Lautsprecher betrieben, der in einem halligen Raum steht. Dort entwickelt sich der Orchesterklang mit einem sehr großen Nachhall, entsprechend der langen Nachhallzeit dieses Raumes. Durch ein Mikrophon wird nun dieser Orchesterklang mit großem Nachhall wieder aufgenommen und mehr oder weniger stark dem ursprünglichen Klang wieder hinzugefügt.

Ähnlich sollte nun auch hier vorgegangen werden. Die Aufgabe ist hier deshalb etwas schwieriger zu lösen, weil der Aufnahme- und der Wiedergabeort derselbe ist und weil infolgedessen die akustische Rückkoppelung hindernd im Wege steht. Mit Hilfe eines Richtmikrophons und entsprechender Anordnung des Wiedergabelautsprechers war es nun möglich, den Nachhall-Lautsprecher mit einer solchen Stärke zu betreiben, daß er einen Beitrag liefern konnte, der eine hörbare Verlängerung des Nachhalls ergab. Vom Nachhallmikrophon im Orchester ging es über Verstärker zu einem Lautsprecher im Probesaal. Der Probesaal war deshalb besonders günstig, da sein Nachhallverlauf in Abhängigkeit von der Frequenz gut zu dem Nachhall des Zuschauerraums paßte. Die Nachhallzeit der Staatsoper wurde für die Töne mittlerer Frequenz zu etwa einer Sekunde festgestellt, ein Wert, der auch früher von MEYER und JORDAN[1]) gefunden worden ist. Hörmäßig stellte sich eine Verlängerung um eine halbe Sekunde als günstig heraus. Die Berliner Philharmonie mit einer anerkannt guten Akustik hat eine Nachhalldauer von etwas über 2 Sekunden. Da in der Staatsoper eine kürzere Nachhallzeit gut klang, scheint es, daß man durch den Charakter des Raumes keinen langen Nachhall erwartet und deshalb dieser verhältnismäßig kleine Wert als richtig erschien. Man ordnet erfahrungsgemäß einem gewissen Raumcharakter einen gewissen Nachhall zu und empfindet deshalb einen unwirklich langen Nachhall als unschön. Der Lautsprecher, der den Klang aus dem Nachhallraum dem Orchester beimischt, war in der ersten Loge des 2. Ranges so aufgebaut, daß er nach der Decke strahlte. Der Standort des Nachhallmikrophons *c* sowie der beiden Mikrophone *a*, *b* zur Verstärkung der Töne hoher Frequenz mit ihren Lautsprechern sind im Grundriß (Abb. 3) eingezeichnet.

Das praktische Ergebnis war tatsächlich eine ausgezeichnete Akustik der Staatsoper. Als

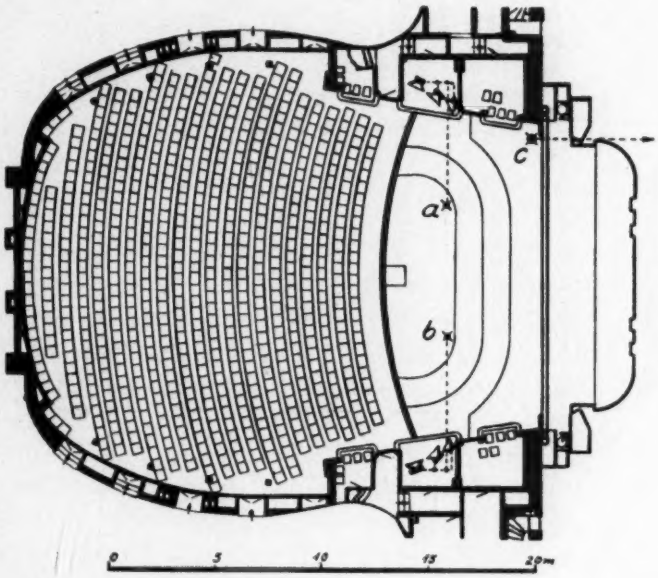

Abb. 3. Grundriß mit eingezeichnetem Podium, Saalabschluß, Mikrophone *a*, *b* mit zugehörigen Lautsprechern zur Wiedergabe der hohen Frequenzen und Nachhallmikrophon *c* mit der Leitung zum Probesaal

besonderer Erfolg ist zu buchen, daß von dieser elektroakustischen Maßnahme nichts bemerkt wurde und daß einige Hörer die hervorragende musikalische Wirkung irrtümlich der neuen Aufstellung des Orchesters zuschrieben. Nur in einem Fall wurde angenommen, wahrscheinlich durch den Anblick der aufgestellten Mikrophone angeregt, daß durch eine Verstärkung des Klanges der hinteren Instrumentengruppen, im wesentlichen also der Holz- und Blechbläser, der gute Zusammenklang erreicht worden sei.

Die hier gemachten Erfahrungen zeigen, daß durch elektroakustische Maßnahmen raumakustische Unzulänglichkeiten weitgehend beseitigt werden können und daß auch in Räumen, in denen aus irgendwelchen Gründen keine

[1]) ERWIN MEYER und VILHELM JORDAN, Nachhallzeiten von Konzerträumen und Schallschluckung der Zuhörerschaft. Elektr. Nachr.-Techn. 12 (1935), S. 213.

baulichen Veränderungen vorgenommen werden dürfen, eine gute Akustik erreicht werden kann.

Ich danke meinen Mitarbeitern, den Herren Dipl.-Ing. GRIESE, HENRICH und LERM, die mir beim Aufbau der Anlage behilflich waren. Mein besonderer Dank aber gebührt Herrn Generalintendanten Staatsrat TIETJEN, der mir in großzügiger Weise ohne Vorurteil die Versuche zu einer derartigen Verbesserung einer gegebenen Raumakustik gestattete und Herrn Staatskapellmeister VON KARAJAN, der mich mit großem Verständnis unterstützte.

(Eingegangen am 21. November 1940.)

Über Richtcharakteristiken von ebenen Strahlerflächen, Strahlerstrecken mit ungleichmäßiger Amplitudenverteilung und der Halbkreislinie

Mitteilung aus dem Laboratorium „Schalltechnik" der Atlas-Werke AG., Bremen

Von Karl Menges

(Mit 27 Textabbildungen)

Ein Punktstrahler strahlt nach allen Richtungen gleichmäßig. Bei einer aus mehreren Punktstrahlern zusammengesetzten Anordnung hängt die resultierende Amplitude von der Richtung ab. Das Gesetz dieser Abhängigkeit heißt die Richtcharakteristik der Strahleranordnung. Wird eine bestimmte Anordnung statt zum Senden zum Empfangen einer Strahlung benutzt, so gilt für die empfangene Amplitude dieselbe Richtcharakteristik. Besonders eingehend ist die Richtcharakteristik für gerade und kreisförmige Gruppen aus einer Anzahl von Punktstrahlern mit gleicher Amplitude von H. STENZEL[1]) untersucht worden. Es ist von ihm an Beispielen auch gezeigt worden[2]), wie die Charakteristik einer geraden Gruppe beeinflußt wird, wenn die mittleren Strahler größere Amplitude haben als die an den Enden der Gruppe.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist zunächst die eingehende Untersuchung der Richtcharakteristik kontinuierlicher Strahlerstrecken, bei denen die Amplitude ungleichmäßig, und zwar symmetrisch zur Mitte oder unsymmetrisch, über die Länge der Strecke verteilt ist. Die Möglichkeit der praktischen Nutzanwendung des Ergebnisses wird erörtert. Die Richtcharakteristik einer gleichmäßig dicht mit Strahlern besetzten Halbkreislinie wird berechnet und in die Arbeit einbezogen, weil sie zu einem Vergleich mit der einer unsymmetrischen Strahlerstrecke herausfordert. Die Charakteristiken geradlinig begrenzter ebener Strahlerflächen werden in einem Zug mit denen von Strahlerstrecken behandelt, da zwischen ebenen Strahlerflächen und Strahlerstrecken der folgende einfache Zusammenhang besteht.

Ein ebenes Flächenstück möge in den umgebenden Raum Energie abstrahlen, dadurch daß in allen seinen Punkten Schwingungen mit gleicher Amplitude und gleicher Phase stattfinden wie bei einer kolbenförmig schwingenden Membran. Wir wollen die Richtcharakteristik in einer in AB (Abb. 1) senkrechten Ebene

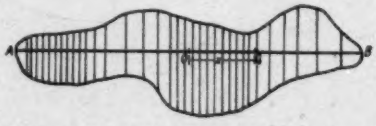

Abb. 1. Strahlerfläche für die in AB senkrechte Ebene durch die Strahlerstrecke AB ersetzbar

(Peilebene) feststellen. Der Aufpunkt soll in dieser Ebene so weit entfernt liegen, daß alle Strahlen von der Fläche zu ihm als parallel angesehen werden können. Denken wir uns die Strahlerfläche in unendlich schmale Streifen senkrecht zu AB zerlegt, so rufen alle Punkte eines solchen Streifens im Aufpunkt zu jeder

[1]) H. STENZEL, Elektr. Nachr.-Techn. 4 (1927), S. 239; 6 (1929), S. 165.

[2]) H. STENZEL, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen, Berlin 1939, Verlag Springer.

Zeit die gleiche Wirkung hervor. Man kann sich also die Strahlerfläche in eine Strahlerstrecke AB zusammengeschoben denken, wenn man die Amplitude in jedem Punkt dieser Strecke proportional der zugehörigen Streifenlänge macht. Mit elektrischen Mitteln lassen sich leicht Anordnungen herstellen, die sich wie eine solche Strahlerstrecke mit ungleichmäßiger Amplitudenverteilung verhalten. Eine Strahlerstrecke hat in allen durch sie gelegten Ebenen dieselbe Charakteristik; ihre räumliche Charakteristik ist rotationssymmetrisch, was für die Charakteristik einer Strahlerfläche nicht zutrifft.

Wählen wir AB als x-Achse und die Mitte O als Nullpunkt, so ist also die in einem Punkt Q der Strahlerstrecke $AB = 2\,l$ herrschende Amplitude $A_{(x)}$ eine Funktion von x, die durch die Randlinie der Strahlerfläche definiert ist. Für die Strahlenrichtung, die mit dem Lot auf der Strahlerfläche den Winkel γ bildet, hat der von Q ausgehende Strahl gegenüber dem von O ausgehenden bei der Wellenlänge λ den Phasenunterschied $\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin\gamma$. Daher ist die resultierende Amplitude in dieser Richtung:

$$(1) \qquad R = \sqrt{\left(\int_{-l}^{+l} A_{(x)} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx\right)^2 + \left(\int_{-l}^{+l} A_{(x)} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx\right)^2}.$$

Verschiebt man einzelne Streifen der Strahlerfläche senkrecht zu AB, so ändert sich die Form der Fläche, aber die Charakteristik bleibt dieselbe. Macht man alle Streifen in demselben Verhältnis länger oder kürzer, so ändert sich Form und Größe der Fläche. Die Charakteristik behält auch in diesem Fall ihre Form, nur der Intensitätsfaktor wird beeinflußt. Es ist üblich, den Intensitätsfaktor gleich 1 zu setzen.

Die beiden Integrale in (1) sind im allgemeinen Funktionen von γ. Wenn aber $A_{(-x)} = A_{(+x)}$ ist, d. h. wenn die Amplitude von der Mitte aus symmetrisch nach beiden Seiten verteilt ist, so wird das erste Integral Null, und man erhält für die Charakteristik die einfachere Formel:

$$(2) \qquad \begin{aligned} R &= \int_{-l}^{+l} A_{(x)} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx \\ &= 2 \cdot \int_{0}^{l} A_{(x)} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx . \end{aligned}$$

An den durchgeführten Beispielen wird sich der Unterschied in den Charakteristiken bei symmetrischer und bei unsymmetrischer Amplitudenverteilung längs der Strahlerstrecke zeigen.

A. Symmetrische Amplitudenverteilung

1. Rechteck

Die Charakteristik eines strahlenden Rechtecks $ABCD$ in der auf ihm senkrechten und parallel zu AB stehenden Ebene ist dieselbe wie die einer gleichmäßig besetzten Strahlerstrecke $AB = l$. Die Breite des Rechtecks hat nur Einfluß auf den Intensitätsfaktor. Die Charakteristik ist gemäß (2), wie bekannt:

$$(3) \qquad R_{(AB)} = f(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

wobei

$$\varphi = \frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma .$$

Diese Funktion $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ beherrscht, wie wir sehen werden, die Charakteristik aller gradlinig begrenzten ebenen Strahlerflächen.

2. Trapez

Die Strahlerfläche sei ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ (Abb. 2), die Peilebene steht in AB senkrecht auf der Trapezfläche. Die strahlende Trapezfläche kann dann durch die Strahlerstrecke $AB = 2\,l_2$ ersetzt werden, auf der die Amplitude von der Mitte O aus nach beiden Seiten bis $x = \frac{CD}{2} = l_1$ konstant gleich der Breite b des Trapezes ist und dann linear ab-

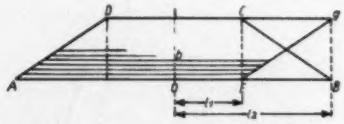

Abb. 2. Trapezförmige Strahlerfläche $ABCD$; parallelogrammförmige Strahlerfläche $AEGD$; Peilebene in AB senkrecht auf der Fläche

sinkt zum Betrag 0 an den Enden A und B. Die Charakteristik der Strahleranordnung ist daher:

$$\begin{aligned} R &= 2\int_{0}^{l_1} b \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx \\ &\quad + 2\int_{l_1}^{l_2} (a - m\,x) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\gamma\right) dx , \end{aligned}$$

wobei $a - m\,l_1 = b$ und $a - m\,l_2 = 0$ ist. Durch Auswertung der Integrale und einfache Umformungen ergibt sich, wenn man noch die Gesamtamplitude $b \cdot (l_1 + l_2)$ des Trapezes gleich 1 setzt:

$$R = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}(l_2 + l_1)\sin\gamma\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(l_2 + l_1)\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda}(l_2 - l_1)\sin\gamma\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(l_2 - l_1)\sin\gamma},$$

oder

$$R = R_{(AE)} \cdot R_{(EB)}, \tag{4}$$

d. h. die Richtcharakteristik einer Trapezfläche ist gleich dem Produkt der Charakteristiken zweier Strecken (bzw. Rechtecke). Die Breite des Trapezes ist ohne Einfluß auf die Form der Charakteristik, sie geht nur in den Intensitätsfaktor ein.

3. Parallelogramm in der Längsrichtung

Die Formel (4) gibt ohne weiteres auch die Charakteristik des Parallelogramms $AEGD$ (Abb. 2); denn man braucht nur das Dreieck EBC von dem Trapez abzuschneiden und in der Lage CGE wieder anzusetzen, was für die Charakteristik in der betrachteten Ebene gleichgültig ist. Überdies kann man das Parallelogramm $AEGD$ aus einer sehr großen Anzahl (n) sehr schmaler Rechtecke von der Länge AE und den Mittenabständen $\frac{EB}{n}$ aufgeschichtet denken, wie in Abb. 2 angedeutet; die Charakteristik ist dann nach einem bekannten Satz:

$$R = R_{(AE)} \cdot \frac{\sin\left[\frac{n\,\pi}{\lambda} \cdot \frac{EB}{n}\sin\gamma\right]}{n \cdot \sin\left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{EB}{n}\sin\gamma\right]},$$

also bei $n \to \infty$

$$R = R_{(AE)} \cdot R_{(EB)}.$$

Die Formel (4) für das Trapez hätte also auf diese Weise umgekehrt vom Parallelogramm ausgehend gefunden werden können.

4. Parallelogramm in beliebiger Richtung

Die Formel (4) liefert auch die Charakteristik eines kolbenförmig schwingenden Parallelogramms in jeder auf ihm senkrechten Ebene. Man braucht nur die Ecken $ABCD$ des Parallelogramms (Abb. 3) auf die betreffende Ebene e' zu projizieren und sieht, daß die Amplitude von D' bis B' konstant ist, während sie von D' bis A' und von B' bis C' linear auf den Betrag 0 abnimmt, wie beim Trapez. Die Projektionen OB' und OC' der Halbdiagonalen stellen die Werte l_1 und l_2 im Sinne der Formel dar. Man kann also durch Drehen der Beobachtungsebene oder des Parallelogramms bequem die Charakteristik in leicht berechenbarer Weise ändern.

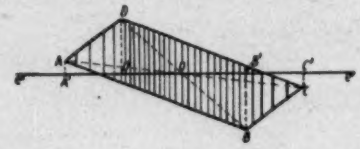

Abb. 3. Peilebene in e' e' senkrecht auf dem Strahlerparallelogramm $ABCD$

5. Rechteck in seiner eigenen Ebene

Für ein Rechteck (Seiten u und v, halbe Diagonale d, Winkel zwischen den Diagonalen $2\,\varepsilon$) ergeben sich für die in Richtung $R_{(\alpha)}$ (Abb. 4) auf dem Rechteck senkrecht stehende Ebene folgende Werte:

$$l_1 = d \cdot \cos(\varepsilon + \alpha),$$
$$l_2 = d \cdot \cos(\varepsilon - \alpha),$$

also

$$l_2 + l_1 = 2\,d\cos\varepsilon\cos\alpha = u \cdot \cos\alpha,$$
$$l_2 - l_1 = 2\,d\sin\varepsilon \cdot \sin\alpha = v \cdot \sin\alpha,$$

und die Richtcharakteristik in dieser Ebene ist daher:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi\,u}{\lambda}\cos\alpha\sin\gamma\right)}{\frac{\pi\,u}{\lambda}\cos\alpha\cdot\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi\,v}{\lambda}\sin\alpha\sin\gamma\right)}{\frac{\pi\,v}{\lambda}\sin\alpha\cdot\sin\gamma}.$$

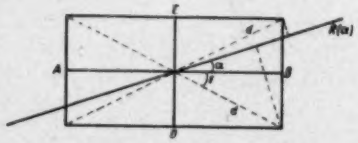

Abb. 4. Zur Charakteristik eines Rechtecks in dessen eigener Ebene

Macht man in dieser Formel $\gamma = 90°$ und α variabel, so erhält man die zuweilen interessierende Richtcharakteristik des Rechtecks in seiner eigenen Ebene:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi\,u}{\lambda}\cos\alpha\right)}{\frac{\pi\,u}{\lambda}\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi\,v}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\frac{\pi\,v}{\lambda}\sin\alpha}. \tag{5}$$

oder

$$R_{(AB)} \cdot R_{(CD)},$$

wobei AB und CD nach Länge und Lage den Rechtecksseiten entsprechen. Der Verlauf der Charakteristik, insbesondere ihre Nullstellen, sind danach leicht zu bestimmen.

B. Möglichkeiten zur Unterdrückung der Nebenmaxima

1. Mittels Rhombus in Diagonalrichtung

Von großem praktischen Interesse ist die Frage, welche Vorteile etwa eine nach den Enden zu schwächer wirkende Strahlerstrecke in bezug auf Peilschärfe und Nebenmaxima bietet. Nach Formel (4) sind die Nullstellen von R dieselben wie die von $R_{(AE)}$ und $R_{(EB)}$ einzeln; insbesondere liegt die erste Nullstelle von R da, wo die Strahlerstrecke AE von der Länge $l_2 + l_1$ ihre erste Nullstelle hat. Also ist das Hauptmaximum (bis zur Nullstelle) immer breiter als das der Strahlerstrecke AB bei gleichmäßiger Amplitude wäre. Aber der Betrag der Nebenmaxima wird durch die Multiplikation zweier Funktionen von der Form $\frac{\sin\psi}{\psi}$ erheblich herabgedrückt. Das möge zunächst an einem Sonderfall erläutert werden. Macht man $l_1 = 0$, so geht das Trapez in ein gleichschenkliges Dreieck über; verdoppelt man dieses Dreieck symmetrisch zur Grundlinie, so erhält man ein Rhombus und im Sonderfall ein Quadrat. Für diese Formen der Strahlerfläche nimmt die Richtcharakteristik gemäß (4) die Form an:

$$(6) \qquad R = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi\, l}{\lambda} \sin\gamma\right)}{\frac{\pi\, l}{\lambda}\sin\gamma} \right)^2 = \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2,$$

wobei l die halbe Grundlinie des Dreiecks bzw. die Hälfte der Diagonale ist, in welcher die Charakteristikebene auf der Strahlerfläche senkrecht steht. Die Nebenmaxima dieser Charakteristik sind also nicht 22%, 13%, 9%, 7% usf. des Hauptmaximums, wie bei einer gleichmäßigen Strahlerstrecke, sondern nur 4,8%, 1,7%, 0,8%, 0,5% usf. (vgl. Abb. 23 und 27).

Für die Peilschärfe, d. i. der Winkel γ_p, bei welchem R auf den Betrag 0,707 des Hauptmaximums gesunken ist, ergibt sich bei einem Quadrat von der Seite s:

$\sin\gamma_p = 0{,}444 \cdot \frac{\lambda}{s}$, wenn die Peilebene parallel zur Seite steht,

$\sin\gamma_p = 0{,}451 \cdot \frac{\lambda}{s}$, wenn die Peilebene in der Diagonale steht.

Man sieht, daß die Peilschärfe in der Diagonalstellung bei kleinem $\frac{\lambda}{s}$ nur unmerklich schwächer ist als in der Parallelstellung, z. B. bei $\frac{\lambda}{s} = \frac{1}{5}$ kaum 0,1° (5,1° in der Parallelstellung, 5,2° in der Diagonalstellung).

2. Mittels Trapez oder Rechteck

Eine noch schärfere Herabdrückung des ersten Nebenmaximums als mit einem Rhombus oder Quadrat in Diagonalstellung erreicht man mit der Trapezform, wenn man $\frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} = 0{,}71$, also $l_2 = 6 \cdot l_1$, macht. Man kann dann R in der Form schreiben:

$$R = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\sin 0{,}71\,\varphi}{0{,}71\,\varphi},$$

wobei

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda}(l_2 + l_1)\sin\gamma\,.$$

Die Zahl 0,71 ist so gewählt, daß der zweite Faktor eine Nullstelle bewirkt da, wo der erste sein 1. Nebenmaximum hat.

Bei der graphischen Darstellung von R (Abb. 5) erkennt man, daß die beiden ersten Nebenmaxima etwa 2,5%, die folgenden etwa 1,8%, 1% und weniger sind. Die Bedingung $l_2 = 6 \cdot l_1$ für die beste Schwächung der Nebenmaxima ist insofern nicht kritisch, als man bei $l_2 = 5 \cdot l_1$ und $l_2 = 7 \cdot l_1$ fast noch die gleiche Wirkung erzielt. Für die praktische Anwendung ist es einfacher, statt der Trapezform ein Rechteck zu benutzen, das man in die geeignete Stellung dreht. Wünscht man, daß diese geeignete Stellung in der Diagonalrichtung liegt, so müssen die Projektionen der Halbdiagonalen sich wie 1 : 6 verhalten, also die Seiten des Rechtecks wie 1 : 0,84.

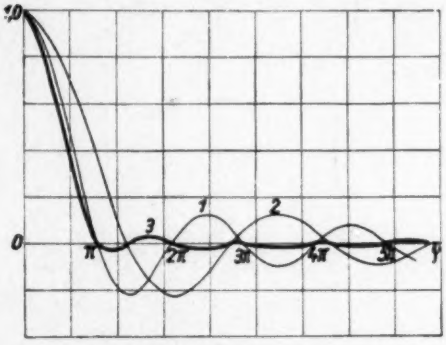

Abb. 5. Schwache Nebenmaxima mittels eines Trapezes; 1. $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$; 2. $\frac{\sin 0{,}71\,\varphi}{0{,}71\,\varphi}$; 3. $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\sin 0{,}71\,\varphi}{0{,}71\,\varphi}$

Es werde nun die noch weitergehende Forderung gestellt, daß die Nebenmaxima

unter 1% des Hauptmaximums liegen. Man kann sie erfüllen, indem man von einem Trapez ausgeht, bei dem die lange Grundseite 8,3mal so lang ist wie die kurze. Seine Richtcharakteristik wird durch die Funktion $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\sin 0{,}785\,\varphi}{0{,}785\,\varphi}$ gegeben, wobei $\varphi=\frac{\pi}{\lambda}(l_2+l_1)\cdot\sin\gamma$ ist. Kombiniert man zwei solche Trapeze mit dem Abstand $0{,}308\cdot(l_2+l_1)$, so wird die Charakteristik dieser Anordnung:

$$(7)\qquad R=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\sin 0{,}785\,\varphi}{0{,}785\,\varphi}\cdot\cos 0{,}308\,\varphi\,.$$

Zeichnet man auf demselben Blatt die drei Faktoren einzeln (Abb. 6), so ergibt sich der Verlauf von R durch Multiplikation der Beträge an jeder Stelle, und man findet, daß die Nebenmaxima um

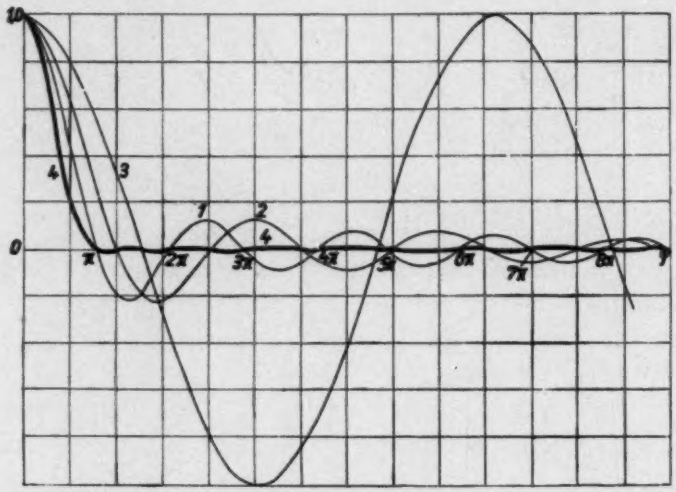

Abb. 6. Nebenmaxima sehr klein durch Kombination zweier Trapeze nach Abb. 7;

1. $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$; 2. $\frac{\sin 0{,}785\,\varphi}{0{,}785\,\varphi}$; 3. $\cos 0{,}308\,\varphi$;

4. $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\sin 0{,}785\,\varphi}{0{,}785\,\varphi}\cdot\cos 0{,}308\,\varphi$

½% des Hauptmaximums liegen. Die Zahlen 0,785 und 0,308 sind nämlich so gewählt, daß das erste (und größte) Nebenmaximum von $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ durch den zweiten und dritten Faktor in drei kleine Nebenmaxima aufgeteilt wird; die folgenden Nebenmaxima werden dann von selbst unter 1% gedrückt. Es ergibt sich eine Amplitudenverteilung längs der Strahlerstrecke AB' gemäß dem Linienzug $AEFGHJKB'$ in Abb. 7.

$ABCD$ und $A'B'C'D'$ sind die beiden Trapeze. Die Höhe der Trapeze und daher auch die Höhe des resultierenden Linienzuges ist ohne Einfluß auf die Form der Charakteristik (wohl auf den Intensitätsfaktor); wesentlich ist dagegen, daß die Steigung über dem Stück $A'D_1$ doppelt so groß ist wie über dem Stück AA' und die Steigung über D_1C_1 wieder gleich der über AA' ist, während die Steigung über dem Mittelstück C_1D_1' Null ist; dabei müssen die Stücke die in der Abb. 7 eingesetzten Längenverhältnisse haben. — Bei einer Strahlerstrecke dieser Art tritt die Amplitude 0,707 bei $\varphi=1{,}03$ ein; daraus ergibt sich, daß ihre Peilschärfe dieselbe ist wie die einer gleichmäßigen Strahlerstrecke von $\frac{2}{3}$ der Gesamtlänge AB'.

Abb. 7. Superposition zweier Trapeze zu einer Strahlerform mit kleinen Nebenmaxima

3. Mittels stetiger Amplitudenabnahme

Man kann zur Schwächung der Nebenmaxima theoretisch auch folgendermaßen vorgehen. Wenn man eine gleichmäßige Strahlerstrecke von der Länge l (unendlich schmales Rechteck) n-mal nebeneinanderlegt mit dem Mittenabstand $\frac{l}{n}$, so gelangt man, wie oben schon ausgeführt, bei $n\to\infty$ zu einem Rhombus oder, was für die Charakteristik gleichwertig ist, zu einem gleichschenkligen Dreieck; die Richtcharakteristik ist nicht mehr $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, sondern $\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2$. Wiederholt man denselben Vorgang mit den Dreiecken, so kommt man zur Richtcharakteristik $\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^3$. Die Amplitudenverteilung folgt einer Kurve nach Abb. 8a.

In Abb. 8 ist zur Klarstellung des Gesetzes das Dreieck nur siebenmal nebeneinandergelegt. Rückt man von A aus auf AD bis zur Ecke des nächsten Dreiecks vor, so hebt man sich um einen bestimmten Betrag c, der nur vom ersten Dreieck herrührt. Benutzt man den Abstand zweier benachbarten Dreiecke als Maßeinheit für die von A aus ge-

messene Abszisse x, so ist die resultierende Höhe $y = c \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + x) = \frac{c \cdot x \cdot (x+1)}{2}$. Diese Gesetzmäßigkeit gilt von A bis C, wo $x = l$ ist, und zwar unabhängig davon, wieviel Dreiecke nebeneinandergelegt werden. Bezeichnen wir mit h die Höhe, die sich bei $x = l$ ergibt, so ist also $h = \frac{c \cdot l \cdot (l+1)}{2}$ und daher $y = h \frac{x\,(x+1)}{l \cdot (l+1)}$. Je mehr Dreiecke nebeneinandergelegt werden, desto größer

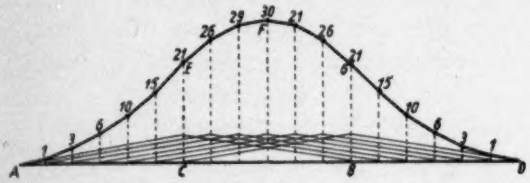

Abb. 8. 7 gleichschenklige Dreiecke mit kleinem Mittenabstand superponiert

werden die Maßzahlen x und l; man kann also im Grenzfall bei unendlich vielen Dreiecken schreiben $y = h \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2$, d. i. ein Parabelbogen mit dem Scheitel in A. Für die Punkte von E bis G ergibt sich ebenfalls eine Parabel, nämlich $y = -2h\left(\frac{x}{l}\right)^2$, bezogen auf den Scheitel F als Nullpunkt. Für $x = \frac{l}{2}$ wird $y = -\frac{h}{2}$; daher ist die Höhenlage von F: $\frac{3h}{2}$. Danach kann die Kurve $AEGD$ aus drei Parabelbogen gezeichnet werden; die Wahl von h ist dabei willkürlich, da eine proportionale Verlängerung oder Verkürzung aller Ordinaten ohne Einfluß auf die Form der Charakteristik ist (Abb. 8a). Die Parabelbogen gehen bei E und G ohne Knick ineinander über (Wendepunkte); denn der Bogen AE hat im Endpunkt E dieselbe Steigung wie der Bogen EF bei E, nämlich $2\frac{h}{l}$. Die Punkte E und G liegen, beiläufig bemerkt, auf den Schenkeln des Dreiecks ADF. Daß die durch die Parabelbogen definierte Amplitudenverteilung zu der Charakteristik $\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^3$ führt, läßt sich durch unmittelbare Integration bestätigen:

$$R = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3h}{2} - \frac{2hx^2}{l^2}\right)\cos k\,x\,dx + 2\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3}{2}l} \frac{h}{l^2}\left(\frac{3l}{2} - x\right)^2 \cos k\,x \cdot dx,$$

wobei $k = \frac{2\pi \sin\gamma}{\lambda}$ und x von der Mitte O aus gemessen ist. Die Auswertung ergibt in der Tat:

$$R = \frac{4hl}{l^3 k^3}\left(3\sin\frac{kl}{2} - \sin\frac{3kl}{2}\right),$$

oder, wenn man wieder $\frac{kl}{2} = \frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma = \varphi$ setzt:

$$R = \frac{4hl}{8\varphi^3}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi) = 2hl \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^3.$$

Der Faktor $2hl$ bedeutet die Größe der Strahlerfläche bzw. Gesamtamplitude der Strahlerstrecke im Hauptmaximum.

Legt man die soeben festgestellte Form der Strahlerfläche wieder n-mal nebeneinander mit dem Abstand $\frac{l}{n}$, so gelangt man bei $n \to \infty$ zu einer Figur (Abb. 8b), die sich aus Parabelbogen 3. Grades zusammensetzt, aber denselben allgemeinen Charakter hat, der übrigens auch schon in dem gebrochenen Linienzug Abb. 7 deutlich hervortritt. Von A bis B

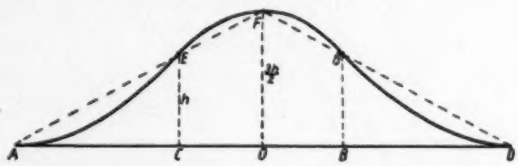

Abb. 8a. Unendlich viele gleichschenklige Dreiecke mit unendlich kleinem Mittenabstand superponiert

$(x = 0$ bis $x = l)$ ist $y = h_1\left(\frac{x}{l}\right)^3$; von der Mitte O bis B und C ist

$$y = h_1\left[4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^3\right],$$

wobei x von O aus zählt und absolut zu nehmen ist. Auch hier gehen die Bogen bei E und G

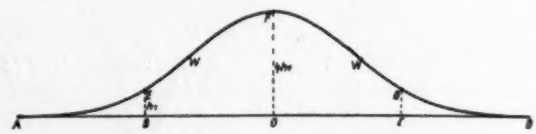

Abb. 8b. Unendlich viele Strahlerflächen von der Form der Abb. 8a mit unendlich kleinem Mittenabstand superponiert

ohne Knick ineinander über; der Wendepunkt liegt aber im Abstand $\frac{2}{3}l$ von der Mitte. Die Charakteristik der neuen Strahlerform ist $\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^4$, wie man durch Ausführung der Inte-

gration:

$$2h_1 \int_0^l \left[4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \cos k x \cdot dx + 2h_1 \int_l^{2l} \left(\frac{2l-x}{l}\right)^3 \cos k x \cdot dx$$

auch wieder bestätigen kann. Das erste Nebenmaximum ist jetzt nur noch $(0{,}22)^4$, d. i. $2{,}3^0/_{00}$. Bei der nächsten Wiederholung des Vorganges sinkt es auf $0{,}5^0/_{00}$.

Nullstellen im strengen Sinne hat die Charakteristik dieser schrittweise aufgebauten Strahleranordnungen immer und nur bei $\varphi = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$ Man kann aber auch neue Nullstellen an beliebig gewünschter Lage erzwingen, indem man die einzelnen Vorgänge ein wenig abändert. Soll z. B. bei $\varphi = 1{,}1\,\pi$ eine neue Nullstelle auftreten, so legen wir die unendlich schmalen Rechtecke von der Länge l nur solange mit unendlich kleinen Mittenabständen nebeneinander, daß der Mittenabstand vom ersten zum letzten Rechteck $\frac{1}{1{,}1}\,l$ (statt vorhin l) ist. Dann entsteht ein Parallelogramm oder, was für die Charakteristik gleichwertig ist, ein Trapez, dessen große Grundlinie $l + \frac{1}{1{,}1}\,l$ und dessen kleine Grundlinie $\frac{1}{1{,}1}\,l$ ist. Die Charakteristik dieses Trapezes ist $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\sin\frac{1}{1{,}1}\varphi}{\frac{1}{1{,}1}\varphi}$; man erkennt die neue Nullstelle bei $\varphi = 1{,}1\,\pi$ und natürlich auch bei $2 \cdot 1{,}1\,\pi$, $3 \cdot 1{,}1\,\pi$ usf. Will man etwa bei $\varphi = 1{,}3\,\pi$ eine weitere Nullstelle haben, so verfährt man mit dem Trapez so wie vorhin mit den Dreiecken, nur macht man den Abstand vom ersten zum letzten Trapez nicht gleich l, sondern nur $\frac{1}{1{,}3}\,l$. Dadurch tritt in der Charakteristik der Faktor $\frac{\sin\frac{1}{1{,}3}\varphi}{\frac{1}{1{,}3}\varphi}$ hinzu und daher die neue Nullstelle bei $\varphi = 1{,}3\,\pi$ ($2 \cdot 1{,}3\,\pi$; $3 \cdot 1{,}3\,\pi$ usf.). So kann man durch Wiederholung des Vorganges immer eine weitere neue Nullstelle erzielen und jedesmal die zugehörige Form der Strahlerfläche bzw. Amplitudenverteilung der Strahlerstrecke ermitteln. Je dichter die Nullstellen gelegt werden, desto kleiner werden die Beträge, zu denen die Charakteristik zwischen den Nullstellen noch anwachsen kann. Abb. 5 und 6, denen bereits solche Erwägungen zugrunde lagen, zeigen, wie wirksam schon eine bzw. zwei zweckmäßig angeordnete Nullstellen zwischen π und $2\,\pi$ die Nebenmaxima schwächen.

Man kann, wie aus vorstehender Betrachtung hervorgeht, die Nebenmaxima einer kontinuierlichen Strahlerstrecke unter jeden vorgeschriebenen Betrag herabdrücken, indem man die Amplitude von der Mitte symmetrisch nach den Enden zu in geeigneter Weise abnehmen läßt. Eine solche mittenverstärkte Strahlerstrecke hat geringere Peilschärfe als eine gleichlange, gleichmäßige Strahlerstrecke; um eine vorgeschriebene Peilschärfe zu erreichen, muß man sie also länger machen als eine gleichmäßige Strahlerstrecke sein müßte.

4. Mittels stufenförmiger Amplitudenabnahme

Technisch ist es kaum möglich, eine kontinuierliche Strahleranordnung herzustellen, deren Amplitude nach den erörterten mathematischen Bedingungen stetig nach den Enden zu abnimmt. Mit einem kolbenförmig schwingenden Rechteck kann man, wie oben gezeigt, zwar in einer bestimmten Ebene die Nebenmaxima auf 2,5% herabdrücken; aber in den Ebenen längs und quer auf dem Rechteck treten die einer gleichmäßigen Strahlerstrecke eigenen Nebenmaxima von 22%, 13% usf. auf. Es fragt sich also, ob man nicht in technisch leicht realisierbarer Weise, etwa durch stufenförmig abnehmende Amplitude, eine befriedigende Bekämpfung der Nebenmaxima erreichen kann. Einem oben schon angewandten Grundgedanken folgend, legen wir zwei gleichmäßig strahlende (schmale) Rechtecke von der Länge l nebeneinander mit einer Mittenverschiebung d. Dann ist die Richtcharakteristik dieser Anordnung

$$R = \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma\right)}{\frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma} \cdot \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\gamma\right),$$

oder

$$(8)\quad R=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos\frac{d}{l}\varphi,\ \text{wobei}\ \varphi=\frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma.$$

Der Faktor $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ hat seine Nullstellen bei $\varphi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$, sein erstes (größtes) Nebenmaximum (22%) bei $\varphi_1=4{,}494$ $\left(\text{etwas vor}\ \frac{3\pi}{2}\right)$. Wählt man nun d so, daß $\frac{d}{l}\cdot\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ also $d=\frac{\pi\cdot l}{2\cdot 4{,}494}=0{,}35\cdot l$ ist, so wird $\cos\frac{d}{l}\varphi_1=0$ und damit $R=0$; d. h. das erste Nebenmaximum von 22% wird in zwei kleinere von etwa 4% zerteilt. Ähnlich ergeht es dem 4., 7., ... Nebenmaximum, während die jeweils dazwischenliegenden zwei Nebenmaxima nur wenig geschwächt werden. Zeichnet man (ähnlich wie in Abb. 5) die Funktionen $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ und $\cos 0{,}35\ \varphi$, so übersieht man leicht den Verlauf von R. Eine Strahleranordnung, die diesen Bedingungen entspricht, ist dadurch herzustellen, daß man tatsächlich zwei gleiche und gleichmäßige Rechtecke mit dem Mittenabstand $0{,}35\cdot l$ nebeneinander vereinigt oder sonstwie bei einer vorhandenen Strahlerstrecke dafür sorgt, daß der mittlere Teil (knapp die Hälfte) die doppelte Amplitude hat wie die Endstücke von je etwa $\frac{1}{4}$ der Gesamtlänge.

Um auch das noch bestehende Nebenmaximum vom Betrag 10% in zwei kleinere aufzuteilen, kann man zwei mittenverstärkte Strahlerstrecken der eben besprochenen Art kombinieren mit dem Mittelpunktsabstand $\frac{l}{5}$. Man erhält dann eine Anordnung wie in Abb. 9. Die Charakteristik ist:

$$(9)\quad R=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\cos 0{,}35\,\varphi\cdot\cos\frac{1}{5}\varphi.$$

Die in Abb. 9 beigesetzten Zahlen geben das Längenverhältnis, die Zahl der Striche die Amplitudenstufung an. Bei dieser Strahleranordnung ist das größte Nebenmaximum etwa 3% des Hauptmaximums. Kombiniert man wieder zwei solche Anordnungen mit dem Mittenabstand $\frac{l}{7}$, so tritt in die Charakteristik der Faktor $\cos\frac{1}{7}\varphi$ hinzu mit der Wirkung, daß das nächste Nebenmaximum in zwei kleinere aufgelöst wird; die Mitte der neuen Strahleranordnung ist jetzt 8mal so empfindlich wie die Enden.

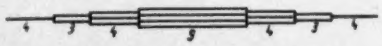

Abb. 9. Amplitude steigt stufenweise (1 : 2 : 3 : 4) nach der Mitte zu; den Stufen entsprechende Längen im Verhältnis 4 : 3 : 4 : 9. Kleine Nebenmaxima

Man kann natürlich auch Anordnungen konstruieren, bei denen die Mitte 3-, 5-, 6-, ... fache Amplitude hat und dabei das Längenverhältnis der Amplitudenstufen so bestimmen, daß die Nebenmaxima möglichst schwach werden. Nimmt man z. B. drei gleiche Strahlerstrecken von der Länge l mit dem Mittenabstand d gegeneinander verschoben, so ist die Charakteristik dieser Anordnung

$$(10)\quad R=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\sin\frac{3d}{l}\varphi}{3\cdot\sin\frac{d}{l}\varphi},\ \text{wobei}\ \varphi=\frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma.$$

Wählt man jetzt $d=0{,}23\cdot l\left(\sim\frac{2}{9}l\right)$, so wird der zweite Faktor, also auch R, dort Null, wo der erste Faktor sein erstes Nebenmaximum hat ($\varphi_1=4{,}494$); dieses wird in zwei kleinere von etwa 4% aufgeteilt. Die Strahlerstrecke ist dann nach dem Schema der Abb. 10 gebildet. Sie wirkt, wie zu erwarten, im ganzen etwas günstiger als

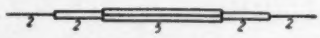

Abb. 10. Amplitudenstufung 1 : 2 : 3; zugehörige Längen 2 : 2 : 5

die mit doppelter Amplitude der Mitte und etwas ungünstiger als die mit 4facher Amplitude der Mitte.

Je mehr Stufen der Amplitude längs der Strahlerstrecke man zuläßt oder anwendet, desto kleiner kann man die Nebenmaxima machen, desto mehr nähert man sich der stetigen Amplitudenabnahme, desto schwieriger wird aber auch die technische Verwirklichung.

5. Versuchsergebnisse

Zur Prüfung der vorstehenden theoretischen Erörterungen wurden Schallversuche im Wasser mit einer 41 cm langen Anordnung aus Magnetostriktionsschwingern gemacht. Die Anordnung konnte für die benutzte Wellenlänge als kontinuierlich angesehen werden. Es waren Vorkehrungen getroffen, daß die Anordnung leicht mit gleichmäßiger oder mit beliebig abgestufter Amplitude betrieben werden konnte. Die entstehenden Charakteristiken wurden auf dem Braunschen Rohr aufgenommen. Die Versuchsergebnisse bestätigten die Theorie bestens. Die Abb. 11 gibt die aufgenommene Charakteristik bei gleichmäßiger Amplitude; Abb. 12 die aufgenommene Charakteristik bei der Am-

plitudenstufung nach Abb. 9. Eine quadratische Schwingerfläche aus Magnetostriktionsblechen lieferte in der auf einer Diagonalen senkrechten Ebene auch die erwartete Charakteristik.

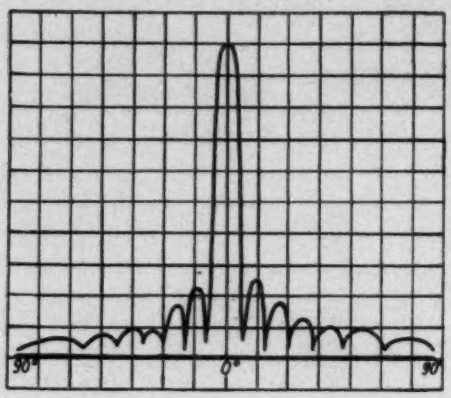

Abb. 11. Experimentell aufgenommene Charakteristik einer Magnetostriktionsschwingeranordnung bei gleichmäßiger Amplitude (vgl. Abb. 12)

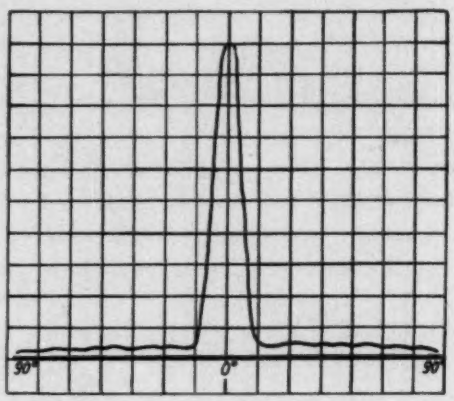

Abb. 12. Experimentell aufgenommene Charakteristik derselben Anordnung wie in Abb. 11 bei Amplitudenstufung nach Abb. 9

6. Geräuschcharakteristik und künstliche Charakteristik

Nach den aufgestellten Formeln ist die Schwächung der Nebenmaxima durch geeignete Amplitudenverteilung nicht an eine bestimmte Frequenz gebunden, sondern betrifft bei gegebener Strahleranordnung alle Frequenzen in gleicher Weise. Das ist besonders beachtenswert, wenn es sich um Geräuschpeilung handelt. Die Geräuschcharakteristik ist also auch durch Regelung der Amplitude günstig zu beeinflussen. Bei der Geräuschpeilung wird meist die Strahleranordnung in einer bestimmten Richtung kompensiert, d. h. statt die ganze Anordnung zu drehen, bewirkt man durch technische Kunstgriffe (Kompensatoren), daß alle Punkte der Anordnung in der gewünschten Richtung phasengleich arbeiten und daher das Hauptmaximum in dieser Richtung liegt. Die dabei entstehende Charakteristik heißt die künstliche. Sie unterscheidet sich von der natürlichen dadurch, daß sie nicht symmetrisch zum Hauptmaximum ist. Aber sie wird nach denselben Formeln berechnet, bei einer kleinen Modifikation des Parameters. Wird die Kompensationsrichtung durch den Winkel γ_0 angegeben, so ist die Phase eines Punktes statt $\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\gamma$ jetzt $\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot (\sin\gamma_0 - \sin\gamma)$ und die künstliche Charakteristik für eine Strahlerstrecke wird wieder

$$R = \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

wobei jetzt nur

$$\varphi = \frac{\pi l}{\lambda} (\sin\gamma_0 - \sin\gamma)$$

ist. Alle weiteren Formeln (außer der für das Rechteck in seiner eigenen Ebene) und insbesondere auch die Feststellungen über die Bekämpfung der Nebenmaxima gelten mit dem angegebenen Wert für φ auch bei der Kompensation.

C. Unsymmetrische Amplitudenverteilung

1. Trapez quer zu den Parallelseiten (Formel)

Es kommt vor, daß die Amplitude einer Strahleranordnung nicht symmetrisch zur Mitte verteilt ist oder daß die Anordnung nur für eine bestimmte Richtung wie eine symmetrische wirkt. Die Richtcharakteristik einer solchen unsymmetrischen Anordnung soll untersucht werden.

Die Amplitude einer Strahlerstrecke $AB = l$ soll von dem einen zum andern Ende gemäß einer linearen Funktion $\phi - q \cdot x$ vom Betrag a zum Betrag b abnehmen. Die entsprechende Strahlerfläche ist ein Trapez $ABCD$ (Abb. 13) für die Peilebene, die in AB auf der Trapez-

fläche senkrecht steht. Wählt man AB als x-Achse und die Mitte O als Nullpunkt, so erhält man für die Richtcharakteristik R:

$$R^2 = \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (p - q\,x)\cdot \sin k\,x\,dx\right]^2 + \left[\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (p - q\,x)\cdot \cos k\,x\,dx\right]^2,$$

wobei zur Abkürzung $\frac{2\pi}{\lambda}\sin\gamma = k$ gesetzt ist. Durch Auswertung der Integrale wird:

$$R^2 = \left[\frac{q\cdot l}{k}\cos\frac{kl}{2} - \frac{2q}{k^2}\sin\frac{kl}{2}\right]^2 + \left[\frac{2p}{k}\sin\frac{kl}{2}\right]^2.$$

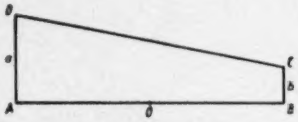

Abb. 13. Trapezförmige Strahlerfläche $ABCD$; Peilebene in AB senkrecht auf der Fläche

Nun ist $p = \frac{a+b}{2}$ und $q = \frac{a-b}{l}$; setzen wir ferner wieder $\frac{kl}{2} = \frac{\pi l}{\lambda}\sin\gamma = \varphi$, so wird

$$R^2 = \left[\frac{(a-b)\cdot l}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\varphi^2}\right)\right]^2 + \left[\frac{(a+b)\,l}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right]^2$$

und

$$R = \frac{(a+b)\,l}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cdot\left(\frac{\varphi\cos\varphi - \sin\varphi}{\varphi^2}\right)^2}.$$

Der Faktor $\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot l$ entspricht der Gesamtamplitude der Strahleranordnung und möge gleich 1 gesetzt werden. Bemerkenswerterweise steht in der letzten Klammer unter der Wurzel die Ableitung der Funktion $f(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$. Daher ergibt sich die gesuchte Charakteristik in der für die Diskussion geeigneten Form:

$$(11) \qquad R = \sqrt{f_{(\varphi)}^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\cdot f'_{(\varphi)}\right)^2}.$$

2. Diskussion

Wenn $b = a$ ist, wird $R = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, wie es für eine gleichmäßige Strahlerstrecke sein muß. Je verschiedener a und b sind, desto mehr macht sich die Abweichung von einer gleichmäßigen Strahlerstrecke bemerkbar. Besonders beachtenswert ist, daß R keine Nullstellen hat (wenn $b \neq a$). Denn dazu wäre nötig, daß die beiden Glieder unter der Wurzel einzeln an derselben Stelle verschwinden; das können sie aber nicht, weil bei den Nullstellen von $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, nämlich $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, das andere Glied $\left(\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{1}{\varphi}\right)^2$, also nicht null ist.

Um den Verlauf von R voll zu überblicken, zeichnen wir (Abb. 14) die bekannte Funktion $f_{(\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ und dazu die Ableitung $f'_{(\varphi)}$; letztere Kurve ist im Verhältnis $\frac{a-b}{a+b}$ zu drücken, dann hat man für jedes φ die beiden Werte, aus denen gemäß Pythagoras R nach Formel (11) hervorgeht. Die schraffierte Fläche in der Zeichnung umfaßt alle möglichen Fälle: ihre untere Randlinie stellt den Grenzfall $b = a$, also eine gleichmäßige Strahlerstrecke dar; die obere Randlinie den anderen Grenzfall $b = 0$; dazwischen verlaufen alle möglichen Fälle, von denen $b = \frac{a}{2}$ eingezeichnet ist. Man erkennt: Während b vom Betrag a allmählich zum Betrag 0 abnimmt, glättet sich die Charakteristik in der Weise, daß die Minima (von scharfen Nullstellen ausgehend) sich mehr und mehr heben und verflachen. Dabei verschiebt sich ihre Lage etwas im Sinne wachsender Werte von φ.

Die Nebenmaxima dagegen behalten ihre Größe und Lage wie bei gleichmäßiger Amplitude bei. Denn die Extremstellen von R ergeben sich aus:

$$R' \equiv \frac{f\cdot f' + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cdot f'\cdot f''}{\sqrt{f^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\cdot f'\right)^2}} = 0.$$

Die erste Serie von Lösungen (aus $f' = 0$) liefert dieselben Extremstellen wie für $f = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, unabhängig von a und b; es sind die Maxima von R, und die zugehörigen Beträge der Maxima werden gemäß (11) dieselben wie bei $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$. Die zweite Serie von Lösungen (aus $f + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cdot f'' = 0$) führt auf die Gleichung $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\varphi} + \frac{2ab}{(a-b)^2}\cdot\varphi$. Je näher b an a

herankommt, desto steiler steigt bei wachsendem φ die Funktion $\frac{1}{\varphi}+\frac{2ab}{(a-b)^2}\cdot\varphi$ auf und schneidet die Zweige von cotg φ immer dichter hinter $\varphi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$; da liegen die Minima. Im Falle $b=0$ dagegen geht die Gleichung in die Form über cotg $\varphi=\frac{1}{\varphi}$ oder tg $\varphi=\varphi$; dies ist aber gleichbedeutend mit $f'=0$, d. h. in diesem Falle verschmelzen die Minima mit den Nebenmaxima zu Terrassenpunkten (vgl. Abb. 14). Die R-Kurve berührt

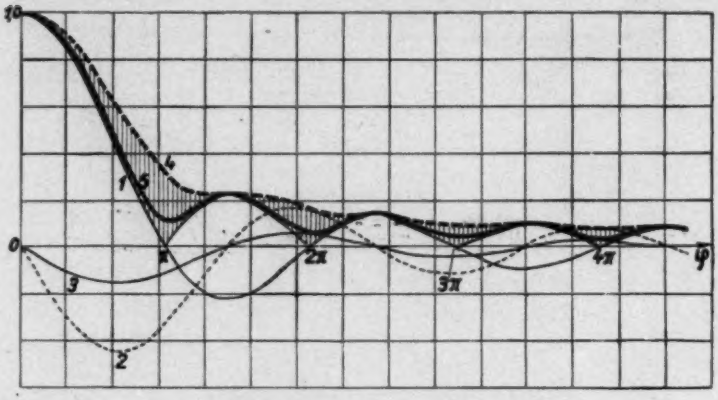

Abb. 14.

Charakteristiken von Strahlerflächen nach Abb. 13: (1) Grenzfall $b=a$ (Rechteck); (4) Grenzfall $b=0$ (Dreieck); (5) $b=\frac{a}{2}$ (Trapez); (2) $f'_{(\varphi)}$; (3) $\frac{1}{3}f'_{(\varphi)}$

die f-Kurve da, wo $f'=0$ ist (Maximumstellen); sie berührt auch die $\frac{a-b}{a+b}\cdot f'$-Kurve, und zwar da, wo $f=0$ ist (also bei $\varphi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$). Denn

wenn $f'=0$, so ist auch $R'=0$ und $R=f$;

wenn $f=0$, so ist $R'=\frac{a-b}{a+b}\cdot f''=\left(\frac{a-b}{a+b}\cdot f'\right)'$

und $R=\frac{a-b}{a+b}\cdot f'$.

Die einzelnen Bogen der Kurven hat man sich dabei wegen der Doppeldeutigkeit der Wurzel an der φ-Achse gespiegelt zu denken.

Die Peilschärfe ist geringer als bei gleichmäßiger Amplitude. Die Amplitude 0,707 des Hauptmaximums tritt ein

a) im Falle $b=a$ bei $\varphi=1{,}392$, woraus $\sin\gamma_p=0{,}443\frac{\lambda}{l}$,

b) im Falle $b=\frac{a}{2}$ bei $\varphi=1{,}422$, woraus $\sin\gamma_p=0{,}453\frac{\lambda}{l}$,

c) im Falle $b=0$ bei $\varphi=1{,}738$, woraus $\sin\gamma_p=0{,}553\frac{\lambda}{l}$.

Bei der experimentellen Aufnahme von Charakteristiken findet man auch bei (anscheinend) symmetrischen Strahleranordnungen gewöhnlich keine deutlich ausgeprägten Nullstellen (vgl. Abb. 11 und 12); das kann nach vorstehendem in irgendeiner unkontrollierten Asymmetrie der Amplitude seinen Grund haben.

Wenn man eine krumme Strahlerlinie mit gleichmäßiger Amplitude in ihrer eigenen Ebene in schräger Peilrichtung kompensiert, so wirkt sie wie eine Strahlerstrecke, die an dem einen Ende größere Amplitude aufweist als am andern. Die Charakteristik wird daher die dadurch bedingten Merkmale zeigen: statt Nullstellen mehr oder weniger hoch liegende Minima. Diese auf die Anschauung gegründete Behauptung wird an dem unten behandelten Beispiel der strahlenden Halbkreislinie mathematisch überzeugend bestätigt.

Für die praktische Anwendung unsymmetrischer Anordnungen verdient die dreieckige Strahlerfläche besondere Beachtung, weil ihre Charakteristik bei willkürlicher Peilschärfe im Hauptmaximum frei ist von Nullstellen und Nebenmaxima. Diese Eigenschaften sind z. B. erwünscht bei selbsttätiger Einpeilung auf das Hauptmaximum oder wenn Energie ohne tote Zonen nach allen Richtungen unter starker Bevorzugung einer bestimmten Richtung gestrahlt werden soll (Abb. 25).

D. Kombination von Strahleranordnungen; „Strahlungsmittelpunkt"

1. Rechtecke

Setzt man zwei gerade gleichmäßige Strahlerstrecken (Rechtecke) von den Längen l_1 und l_2 aneinander, so kann man die Charakteristik der

Gesamtanordnung erhalten, indem man die Charakteristikwerte $l_1 \cdot \frac{\sin k\,l_1}{k\,l_1}$ und $l_2 \cdot \frac{\sin k\,l_2}{k\,l_2}$ unter Berücksichtigung der Phasendifferenz der Mittelpunkte M_1 und M_2 vektoriell addiert. Dabei ist $k = \frac{\pi}{\lambda} \sin\gamma$, also wird die resultierende Charakteristik

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\Big[\sin^2 k\,l_1 + \sin^2 k\,l_2 + 2 \sin k\,l_1 \cdot \sin k\,l_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \sin\gamma\right)\Big]$$

oder:

$$\begin{aligned} k^2 R^2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2k\,l_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2k\,l_2 \\ &\quad + 2 \sin k\,l_1 \sin k\,l_2 \cdot \cos k\,(l_1 + l_2) \\ &= 1 - \cos k\,(l_1 + l_2) \cdot \cos k\,(l_1 - l_2) \\ &\quad + 2 \sin k\,l_1 \cdot \sin k\,l_2 \cdot \cos k\,(l_1 + l_2) \\ &= 1 - \cos k\,(l_1 + l_2)\,[\cos k\,(l_1 - l_2) \\ &\quad - 2 \sin k\,l_1 \cdot \sin k\,l_2] \\ &= 1 - \cos^2 k\,(l_1 + l_2) = \sin^2 k\,(l_1 + l_2) \end{aligned}$$

also:

$$R = (l_1 + l_2) \cdot \frac{\sin k\,(l_1 + l_2)}{k \cdot (l_1 + l_2)}.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der sofort angebbaren Form der Charakteristik für $l_1 + l_2$ überein; darin liegt der Beweis, daß man eine gleichmäßige Strahlerstrecke unter Erhaltung ihrer Charakteristik durch ihren Mittelpunkt ersetzen kann. Dasselbe gilt für jede symmetrische Anordnung.

2. Trapeze und Dreiecke

Es ist jetzt die Frage, ob man auch eine Strahleranordnung, deren Amplitude von einem zum andern Ende linear abnimmt, im gleichen Sinne zu einem Punkt zusammengezogen denken kann und wo dieser Punkt liegt; wir wollen ihn den „Strahlungsmittelpunkt" nennen. Um seine Lage zu bestimmen, setzen wir zwei gleiche trapezförmige Strahlerflächen nach Art der Abb. 15 zu einer rechteckigen Strahlerfläche zusammen. Der Abstand der Strahlungsmittelpunkte S_1 und S_2 von der geometrischen Mitte der entsprechenden Strahlerstrecke sei $\not p$. Dann ist die resultierende Charakteristik einerseits:

$$2\,\frac{a+b}{2} \cdot l \cdot \sqrt{f^2 + \left(\frac{a-b}{a+b} f'\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} 2\not p \sin\gamma\right),$$

andererseits $(a + b)\,l \cdot f$. Also ergibt sich durch Gleichsetzen:

$$\cos\left(2\varphi\,\frac{\not p}{l}\right) = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \left(\frac{a-b}{a+b} f'\right)^2}} = \frac{f}{R} \tag{12}$$

und daraus

$$\sin\left(2\varphi\,\frac{\not p}{l}\right) = -\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{f'}{R},$$

$$\operatorname{tg}\left(2\varphi\,\frac{\not p}{l}\right) = -\frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{f'}{f}.$$

Die Minuszeichen bei den beiden letzteren Formeln sind zu setzen, weil sonst $2\varphi\,\frac{\not p}{l}$ bei wachsendem φ negativen Drehsinn hat.

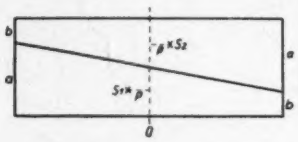

Abb. 15. Zwei gleiche Trapeze (Strahlungsmittelpunkte S_1 und S_2) zu einem Rechteck vereinigt

Man sieht: $\frac{\not p}{l}$ hängt von φ, also von λ und der Strahlungsrichtung ab; ein festliegender Strahlungsmittelpunkt für eine unsymmetrische Strahleranordnung existiert also nicht. Zwischen dem Strahlungsmittelpunkt und der Mitte der Strahlerstrecke besteht ein jeweiliger Phasenunterschied $2\varphi\,\frac{\not p}{l}$ gemäß den Formeln (12). Nur wenn $b = a$ wird, wird $\cos\left(2\varphi\,\frac{\not p}{l}\right)$ konstant $= 1$ und daher $\not p = 0$; d. h. der Strahlungsmittelpunkt einer gleichmäßigen Strahleranordnung liegt fest, und zwar in der Mitte der Strahlerstrecke.

Im Grenzfall $\varphi = 0$, d. h. beim Hauptmaximum oder bei $\lambda = \infty$, ist $\operatorname{tg}\left(\frac{2\varphi \cdot \not p}{l}\right) = 0$, also $\frac{2\varphi\not p}{l} = 0$ und $\frac{\not p}{l} = \frac{0}{0}$. Zur Bestimmung dieses Grenzwertes entwickeln wir f' und f in Potenzreihen und finden für kleine Werte von φ: $\frac{f'}{f} = -\frac{\varphi}{3}$, also $2\varphi\,\frac{\not p}{l} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\varphi}{3}$ und daher $\not p = \frac{l}{6} \cdot \frac{a-b}{a+b}$. Danach liegt in diesem Falle der Strahlungsmittelpunkt im Schwerpunkt des Trapezes bzw. (bei $b = 0$) des Dreiecks. Bei wachsendem φ rückt der Strahlungsmittelpunkt weiter von der Mitte weg.

3. Neue geometrische Charakteristikdarstellung

Durch die Formeln (12) wird eine neue Art der graphischen Charakteristikdarstellung nahegelegt, die einer unsymmetrischen Anordnung besser angepaßt ist (Abb. 16). Die zu einem bestimmten φ-Wert gehörigen Werte von f und $\frac{a-b}{a+b} \cdot f'$ werden in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen, so daß jedem Wert von φ ein Punkt der Ebene entspricht. Der Leitstrahl vom Nullpunkt zu diesem Punkt ist dann der Betrag der zu dem φ-Wert gehörigen Richtcharakteristik, und sein Winkel gegen

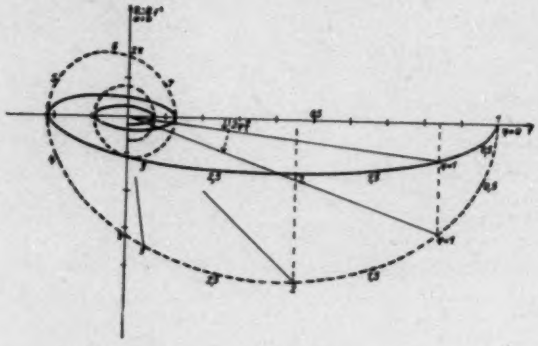

Abb. 16. Charakteristik in Spiralform.
Gestrichelt: Grenzfall $b = 0$; ausgezogen: $b = \frac{a}{2}$

die f-Achse ist die zugehörige Phase des Strahlungsmittelpunktes gegenüber der Mitte der Anordnung. Wächst φ von 0 bis ∞, so durchläuft der zugehörige Punkt eine Spirale, die in Richtung der f'-Achse um so mehr zusammengedrückt ist, je näher die Strahlerstrecke einer gleichmäßigen kommt. Man erkennt die festliegenden Maxima von R auf der f-Achse ($f' = 0$) und sieht, wie die Minima von R bei gleichmäßiger werdender Strahlerstrecke (gedrücktere Spirale) immer schärfer werden und dabei näher an die f'-Achse ($f = 0$) rücken.

Man kann auch bei der Kombination von unsymmetrischen Anordnungen mit deren Strahlungsmittelpunkten arbeiten, wenn man dabei nur ihre jeweilige Lage gemäß Formel (12) in Rechnung stellt. Das möge an einigen Beispielen gezeigt werden.

4. Beispiele für Kombinationen.

Eine rechteckige Strahlerfläche (gleichmäßige Amplitude b) und eine dreieckige Strahlerfläche (Amplitude abnehmend von a—b bis 0) von gleicher Länge l werden zu einer trapezförmigen Strahlerfläche nach Art der Abb. 17 vereinigt. Ihre Strah-

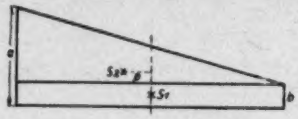

Abb. 17. Rechteck (Strahlungsmittelpunkt S_1) mit Dreieck (Strahlungsmittelpunkt S_2) zu einem Trapez vereinigt

lungsmittelpunkte haben den (variablen) Abstand p. Die resultierende Charakteristik ist dann

$$R^2 = (l\,b\,f)^2 + \left(l \cdot \frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot (f^2 + f'^2) + 2\,l\,b\,f \cdot l \cdot \frac{a-b}{2} \sqrt{f^2 + f'^2} \cdot \cos \frac{2\,\varphi\,p}{l}.$$

Da nach (12)

$$\cos \frac{2\,\varphi\,p}{l} = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}}$$

ist, so wird:

$$R^2 = l^2 \left[(b\,f)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 f^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right) f'^2 + 2b \cdot \frac{a-b}{2} f^2 \right] = l^2 \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 f^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 f'^2 \right],$$

also

$$R = \frac{l(a+b)}{2} \cdot \sqrt{f^2 + \left(\frac{a-b}{a+b} \cdot f'\right)^2},$$

d. i. die Charakteristik des Trapezes, wie sie aus Formel (11) auch sofort angegeben werden konnte.

Zwei Dreiecksanordnungen von der Länge l werden nach Art der Abb. 18 zu einer Rhombus-

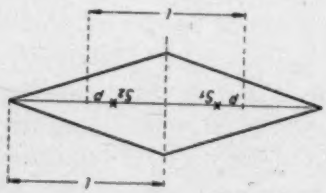

Abb. 18. Zwei Dreiecke zu einem Rhombus vereinigt

anordnung vereinigt. Der Abstand der Strahlungsmittelpunkte ist $l - 2\,p$. Die resultierende Charakteristik ist:

$$R = \sqrt{f^2 + f'^2} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(l - 2\,p)\sin\gamma\right] = \sqrt{f^2 + f'^2} \cdot \cos\left(\varphi - \frac{2\,\varphi\,p}{l}\right) = \sqrt{f^2 + f'^2} \cdot \left(\cos\varphi \cdot \cos\frac{2\,\pi\,p}{l} + \sin\varphi \cdot \sin\frac{2\,\varphi\,p}{l}\right),$$

so gemäß Formeln (12):

$$A = \sqrt{f^2+f'^2}\left(\cos\varphi\cdot\frac{f}{\sqrt{f^2+f'^2}} - \sin\varphi\cdot\frac{f'}{\sqrt{f^2+f'^2}}\right)$$
$$= \cos\varphi\cdot\frac{\sin\varphi}{\varphi} - \sin\varphi\,\frac{(\varphi\cos\varphi-\sin\varphi)}{\varphi^2} = \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2,$$

wie es sich auch im Abschnitt B direkt ergab.

Setzt man die beiden Dreiecke nach Art der Abb. 19 zusammen, so ist der Abstand der Strahlungsmittelpunkte $l + 2p$ und es ergibt sich auf gleiche Weise

$$R = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi} - \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2.$$

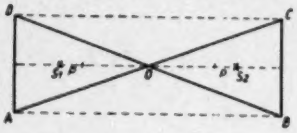

Abb. 19. Zwei Dreiecke, mit der Spitze gegeneinander, vereinigt

Der Unterschied dieser Kombination gegen die vorige ist eben in der Lage der Strahlungsmittelpunkte begründet, während die Charakteristiken der Teildreiecke dieselben sind (vgl. Abb. 26 und 27).

Fügt man zu der vorigen Anordnung, die wegen ihrer Symmetrie den festen Strahlungsmittelpunkt O hat, die beiden Dreiecke AOB und COD hinzu, die zusammen einem Rhombus mit demselben Strahlungsmittelpunkt O äquivalent sind, so addieren sich wegen der konstanten Phasendifferenz 0 der Strahlungsmittelpunkte die Charakteristiken und man erhält, da die Intensitäten gleich sind:

$$R = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi} - \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2$$
$$= \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi},$$

d. i., wie es sein muß, die Charakteristik einer gleichmäßigen (rechteckigen) Strahleranordnung von der Länge $2l$. Der Intensitätsfaktor 2 ist in der Verdoppelung der Fläche (Gesamtamplitude) begründet.

Es macht keine Schwierigkeiten, weitere Beispiele für die Kombination zweier Strahleranordnungen zu bilden.

Nach vorstehendem ist es grundsätzlich möglich, die Charakteristik eines beliebigen, kolbenförmig schwingenden Vielecks in jeder auf ihm senkrechten Ebene zu berechnen. Projiziert man nämlich die Ecken des Vielecks auf die Ebene, so wird das Vieleck in Trapeze und Dreiecke zerlegt. Die Charakteristiken dieser Trapeze und Dreiecke sind unter Berücksichtigung der Phasenunterschiede zwischen ihren jeweiligen Strahlungsmittelpunkten vektoriell zu addieren.

E. Richtcharakteristik einer gleichmäßig dicht mit Strahlern besetzten Halbkreislinie

1. Natürliche Charakteristik

a) Räumlich

Wir ziehen in der Ebene des Halbkreises vom Mittelpunkt O einen Strahl, der mit dem Durchmesser AB (Abb. 20) den Winkel β bildet. In dem Strahl errichten wir eine Ebene senkrecht zur Halbkreisebene. Ein von O ausgehender Strahl in der Ebene möge mit dem Lot, das in O auf der Halbkreisebene errichtet ist, den Winkel γ bilden. Jede Richtung im Raum ist dann durch die beiden Winkel β und γ bestimmt. Das Bogenelement $r\,d\,\psi$ hat in dieser Richtung in bezug auf den Punkt O die Phase

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\beta-\psi)\sin\gamma$$

oder

$$\frac{2\pi r}{\lambda}[\sin\gamma\cdot\cos\beta\cos\psi + \sin\gamma\sin\beta\sin\psi].$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\cdot\cos\beta = k$$

(13) und

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\sin\beta = m,$$

so ist die Phase:

$$k\cos\psi + m\sin\psi.$$

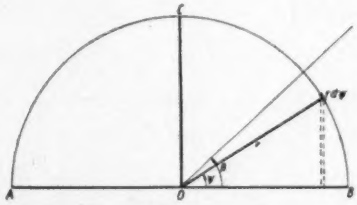

Abb. 20. Zur Charakteristik einer Halbkreislinie

Setzen wir die Gesamtamplitude des Halbkreises, die im Hauptmaximum ($\gamma = 0$) eintritt, gleich 1, so entfällt auf das Bogenelement $r\,d\,\psi$ die Amplitude $\frac{1}{\pi}\,d\,\psi$.

Zur Berechnung der resultierenden Amplitude $R_{(\beta,\gamma)}$ sind die beiden Integrale zu bilden:

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\cos\psi + m\sin\psi)\,d\psi,$$

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(k\cos\psi + m\sin\psi)\,d\psi.$$

Dann ist

$$R_{(\beta,\gamma)} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Durch Umformung wird zunächst:

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\cos\psi)\cdot\cos(m\sin\psi)\,d\psi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\cos\psi)\sin(m\sin\psi)\,d\psi.$$

Das zweite Glied ist Null, da der Integrand bei ψ und $\pi - \psi$ entgegengesetzt gleiche Werte hat. Das erste Glied ist nach einer Formel von BESSEL (Abhandlungen der Berliner Akademie 1824) gleich der BESSELschen Funktion[3]) J_0 für das Argument $\sqrt{k^2+m^2}$. Also ergibt sich:

$$A = J_{0(\sqrt{k^2+m^2})} \tag{14}$$

und durch Einsetzen der Werte für k und m:

$$A = J_{0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)}. \tag{15}$$

Für B erhalten wir durch Umformung zunächst:

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\cos\psi)\cdot\cos(m\sin\psi)\,d\psi + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\cos\psi)\sin(m\sin\psi)\,d\psi$$

oder, da das erste Integral Null ist,

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\cos\psi)\cdot\sin(m\sin\psi)\,d\psi. \tag{16}$$

Der Wert dieses Integrals hängt von k und m, also von $\frac{r}{\lambda}$ und der Richtung (β, γ) ab. Eine unmittelbare und einfache Beziehung zu tabellierten Funktionen ist nicht bekannt. Wir entwickeln daher zwecks Auswertung des Integrals den $\cos(k\cdot\cos\psi)$ in eine unendliche Reihe und erhalten:

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(m\sin\psi)\,d\psi - \frac{k^2}{2!\,\pi}\int_0^{\pi} \sin(m\sin\psi)\cos^2\psi\,d\psi + \frac{k^4}{4!\,\pi}\int_0^{\pi} \sin(m\sin\psi)\cos^4\psi\,d\psi - \cdots \tag{17}$$

[3]) Über BESSELsche Funktionen und STRUVEsche Funktionen: N. NIELSEN, Handbuch der Zylinderfunktionen. N. W. MCLACHLAN, Bessel Functions for Engineers, Oxford 1934. JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln, B. G. Teubner, 1938.

Die hier auftretenden Integrale sind durch die STRUVEschen Funktionen[3]) $S_{0(m)}$, $S_{1(m)}$, $S_{2(m)}$ usf. ausdrückbar; denn diese sind definiert durch

$$S_{n(m)} = \frac{2\cdot\left(\frac{m}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(m\cos\psi)\cdot\sin^{2n}\psi\,d\psi$$

oder

$$= \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\int_0^{\pi} \sin(m\sin\psi)\cdot\cos^{2n}\psi\,d\psi.$$

Ersetzt man hiernach die in der Reihe für B auftretenden Integrale, so erhält man nach den nötigen Vereinfachungen:

$$B = S_{0(m)} - \frac{1}{1!}\left(\frac{k^2}{2m}\right)S_{1(m)} + \frac{1}{2!}\left(\frac{k^2}{2m}\right)^2 S_{2(m)} - \frac{1}{3!}\left(\frac{k^2}{2m}\right)^3 S_{3(m)} + \cdots. \tag{18}$$

Die STRUVEschen Funktionen $S_{0(m)}$ und $S_{1(m)}$ sind bis $m = 15$ tabelliert; die folgenden können durch die Reduktionsformel:

$$S_{n+1(m)} = \frac{2n}{m}S_{n(m)} - S_{n-1(m)} + \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)!}$$

oder aus Reihenentwicklungen berechnet werden. B ist also auch in jedem Falle berechenbar.

Wieviel Glieder der Reihe (18) berücksichtigt werden müssen, hängt von den Werten k und m ab. Wenn m klein und k groß ist, ist es vorteilhafter, zur Auswertung des Integrals (16) den $\sin(m\sin\psi)$ in eine Reihe zu entwickeln. Das hierbei im ersten Glied auftretende Integral ist unmittelbar, das im zweiten Glied durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration allgemein ausführbar; für die folgenden läßt sich durch zweimalige Anwendung partieller Integration eine Reduktionsformel ableiten. Doch soll diese Berechnungsweise von B hier nicht näher ausgeführt werden, weil auch sie bei der Anwendung mühselig ist. Für praktisch gegebene Werte von k und m wird man es vorziehen, B durch graphische Integration gemäß (16) zu ermitteln.

Die Richtcharakteristik der Halbkreislinie ist nunmehr:

$$R_{(\beta,\gamma)} = \sqrt{J^2_{0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)} + B^2}. \tag{19}$$

Solange B nicht für eine hinreichende Anzahl von Werten berechnet (tabelliert) ist, läßt sich

die räumliche Charakteristik nicht allgemein anschaulich überblicken. Dennoch kann man ihre wesentlichen Merkmale aus der Formel (19) leicht ableiten. Zunächst sei zur Kontrolle der Formel $\gamma = 0$ gesetzt; dann wird $k = m = 0$ und daher $B = 0$ und $R = J_{0(0)} = 1$, wie es nach der Festsetzung für die Gesamtamplitude sein muß. Die in der Formel (19) auftretende BESSELsche Funktion $J_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)$ bedeutet bekanntlich die räumliche Charakteristik eines Vollkreises, wovon man sich auch sofort überzeugt, wenn man die für A und B oben aufgestellten Integrale statt von 0 bis π von 0 bis 2π erstreckt. Die Formel (19) besagt also, daß die Charakteristik des Halbkreises in keiner Richtung einen kleineren, im allgemeinen aber einen größeren Betrag hat als die des Vollkreises. Die Peilschärfe ist also in allen Ebenen geringer als beim Vollkreis, im Grenzfalle gleich. Zur weiteren Diskussion greifen wir bestimmte Peilebenen heraus.

b) In Meridianebenen

Wir wählen $\beta = 0$, d. h. wir befinden uns in der Peilebene, die auf der Halbkreisebene im Durchmesser AB senkrecht steht. Dann wird $m = 0$ und daher nach (2) $B = 0$, also $R = J_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)$; d. h. in dieser Ebene hat die Charakteristik des Halbkreises dieselbe Form wie die des Vollkreises. Dieses Ergebnis war aus der Anschauung vorauszusagen. Will man den Halbkreis für diese Peilebene durch eine Strahlerstrecke AB ersetzen, so muß man die einzelnen Bogenelemente auf AB projizieren und sieht, daß die Amplitude vom Mittelpunkt O aus symmetrisch nach A und B hin zunimmt, und zwar nach dem Gesetz

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}.$$

Trägt man diese Werte als Ordinaten auf, so entsteht eine Kurve nach Abb. 21. Die schraffierte Fläche würde, gleichmäßig dicht mit strahlenden Punkten besetzt, in der betrachteten Ebene dieselbe Charakteristik liefern wie die Halbkreislinie. Die Peilschärfe ist wegen der verstärkten Enden besser als bei der gleichmäßigen Strecke AB, wie man durch eine einfache Rechnung auch bestätigt findet. Für den Halbkreis ist $\sin\gamma_p = 0{,}359\,\frac{\lambda}{2r}$, für die gleichmäßige Strecke $\sin\gamma_p = 0{,}443\cdot\frac{\lambda}{2r}$.

Als zweite Meridianebene wählen wir die im Radius OC (Abb. 20) auf der Halbkreisebene senkrechte Peilebene, für die $\beta = 90^0$ ist.

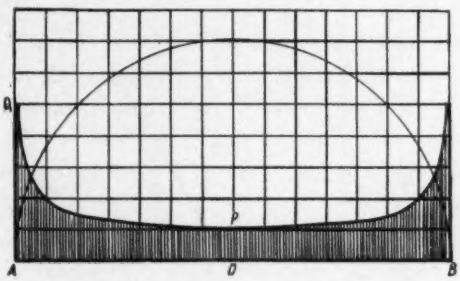

Abb. 21. Halbkreislinie für die in AB senkrechte Peilebene durch schraffierte Strahlerfläche ersetzbar

Dann ist $k = 0$ und $m = \frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma$, daher wird nach (18) $B = S_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)$

und

$$(20) \qquad R = \sqrt{J_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right) + S_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\gamma\right)}.$$

Da die Funktionen $J_{0(z)}$ und $S_{0(z)}$ tabelliert vorliegen, so kann man sie leicht graphisch darstellen und anschließend den Verlauf von R zeichnen (Abb. 22). R hat keine Nullstellen,

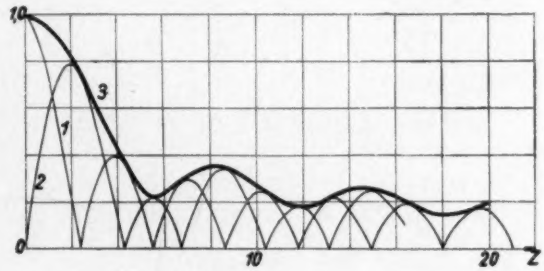

Abb. 22. Charakteristik der Halbkreislinie für die in OC (Abb. 20) senkrechte Peilebene

1. BESSELsche Funktion $J_{0(z)}$; 2. STRUVEsche Funktion $S_{0(z)}$; 3. $\sqrt{J_{0(z)}^2 + S_{0(z)}^2}$

sondern nur verhältnismäßig flache Minima. Die R-Kurve berührt die J_0-Kurve, und zwar da, wo $S_0 = 0$; sie berührt auch die S_0-Kurve,

und zwar da, wo $J_0 = 0$ ist. Denn es ist

$$R' = \frac{J_0 J_0' + S_0 S_0'}{\sqrt{J_0^2 + S_0^2}}$$

und daher,

wenn $S_0 = 0$, so ist $R = J_0$ und $R' = J_0'$
wenn $J_0 = 0$, so ist $R = S_0$ und $R' = S_0'$.

Die Analogie des ganzen Sachverhalts mit dem oben diskutierten Fall der trapezförmigen Strahlerfläche (quer zu den Parallelseiten) sowohl im analytischen Bau der Formeln (11) und (20) wie in der geometrischen Darstellung springt in die Augen. Ersetzt man den Halbkreis in bezug auf die hier betrachtete Peilebene durch eine Strahlerfläche, so hat diese die Form $AOPQ$ in Abb. 21. Die Amplitude nimmt vom einen zum andern Ende monoton ab. Obgleich nun diese Abnahme (wenigstens auf etwa einem Drittel der Länge) von der Linearität stark abweicht, hat die Charakteristik doch eine ganz ähnliche Form wie beim Trapez. Man darf also allgemein schließen: Wenn die Amplitude längs einer Strahleranordnung in der Peilebene nicht symmetrisch zur Mitte verteilt ist, so treten in der Charakteristik statt Nullstellen nur mehr oder weniger flache Minima auf.

c) In der eigenen Ebene

Um die Charakteristik der Halbkreislinie in ihrer eigenen Ebene zu erhalten, brauchen wir in Formel (19) nur $\gamma = 90^0$ zu setzen und β als richtungbestimmende Variable anzusehen. Wir erhalten:

$$R = \sqrt{J_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) + B^2}.$$

In diesem Falle ist das erste Glied unter der Wurzel konstant für alle Richtungen, wie ja beim Vollkreis die ganze Charakteristik. Für die Richtung $\beta = 90$ (Radius OC) wird insbesondere $k = 0$, $m = \frac{2\pi r}{\lambda}$, also

$$B = S_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad R = \sqrt{J_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right) + S_0^2\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)}.$$

Da J_0 und S_0 nicht zugleich Null sein können, so kann R in Richtung OC bei keinem Wert von $\frac{r}{\lambda}$ Null sein, wohingegen in Richtung des Durchmessers AB ($\beta = 0$) R Null sein kann, nämlich wenn $\frac{2\pi r}{\lambda}$ auf eine Nullstelle von J_0 fällt $\left(\frac{2\pi r}{\lambda} = 2{,}4;\ 5{,}52;\ 8{,}65 \text{ usf.}\right)$.

d) Peilebene zur eigenen Ebene geneigt

Von praktischem Interesse ist noch die Charakteristik in einer Peilebene, die durch den Durchmesser AB geht und mit der Halbkreisebene einen Winkel ε bildet. Für eine in dieser Peilebene gelegene Richtung, die mit AB den Winkel β bildet, hat das Bogenelement $r\,d\psi$ in bezug auf O die Phase

$$\frac{2\pi r}{\lambda}[\cos\beta\cos\psi + \cos\varepsilon\sin\beta\sin\psi].$$

Setzt man also jetzt

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\beta = k \quad \text{und} \quad \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varepsilon\sin\beta = m,$$

so verläuft die weitere Rechnung genau wie oben, und man erhält

$$R = \sqrt{J_0^2\left(\sqrt{k^2+m^2}\right) + B^2}. \tag{20}$$

In diesem Falle ist $k^2 + m^2$, also auch $J_0\left(\sqrt{k^2+m^2}\right)$ von β abhängig.

2. Künstliche Charakteristik

Der strahlende Halbkreis sei kompensiert in einer Richtung, die durch die Winkel β_0 und γ_0 bestimmt ist. Dann hat das Bogenelement $r\,d\psi$ für die Richtung (β, γ) in bezug auf O die Phase

$$\frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\beta_0 - \psi)\sin\gamma_0 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\beta - \psi)\sin\gamma$$

oder

$$\frac{2\pi r}{\lambda}(\sin\gamma_0\cos\beta_0 - \sin\gamma\cos\beta)\cdot\cos\psi + \frac{2\pi r}{\lambda}(\sin\gamma_0\sin\beta_0 - \sin\gamma\sin\beta)\sin\psi.$$

Setzt man wieder den Faktor von $\cos\psi$ gleich k und den von $\sin\psi$ gleich m, so verläuft die ganze weitere Rechnung wie oben und liefert

$$R = \sqrt{J_0^2\left(\sqrt{k^2+m^2}\right) + B^2}. \tag{21}$$

Greifen wir eine Meridianebene (β konstant) heraus und nehmen die Kompensationsrichtung in dieser Ebene an, also $\beta_0 = \beta$, so wird

$$\sqrt{k^2+m^2} = \frac{2\pi r}{\lambda}(\sin\gamma_0 - \sin\gamma), \tag{22}$$

also wieder von β unabhängig wie im unkompensierten Falle.

Ist der Halbkreis in seiner eigenen Ebene in Richtung β_0 kompensiert, so wird für diese Ebene wegen $\gamma = \gamma_0 = 90^0$

$$\sqrt{k^2+m^2} = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin\frac{\beta_0 - \beta}{2}. \tag{23}$$

Die in (22) und (23) berechneten Sonderwerte für $\sqrt{k^2+m^2}$ sind die bekannten Argumente, mit denen die Besselsche Funktion J_0 die Charakteristik des kompensierten Vollkreises in einer Meridian- bzw. der eigenen Ebene darstellt. $J_0\left(\sqrt{k^2+m^2}\right)$

stellt aber ganz allgemein die Charakteristik des kompensierten Vollkreises dar. Denn die Rechnung für den Vollkreis unterscheidet sich von der für den Halbkreis nur dadurch, daß die für A und B anfangs aufgestellten Integrale statt von 0 bis π von 0 bis 2π zu erstrecken sind, was für A ebenfalls auf $J_0(\sqrt{k^2+m^2})$ und für B auf den Wert 0 führt. Die Formel (21) besagt also, daß auch bei Kompensation die Charakteristik des Halbkreises im allgemeinen einen größeren Betrag hat als die des Vollkreises, nur in besonderen Richtungen den gleichen.

Wird eine Halbkreislinie in ihrer eigenen Ebene in irgendeiner Richtung kompensiert, so liefert die Rechnung nach (21) eine Charakteristik ohne Nullstellen. Das ist kennzeichnend für eine Strahleranordnung mit unsymmetrischer Amplitudenverteilung. In der Tat verhält sich die Halbkreislinie für eine willkürliche Richtung unsymmetrisch, weil bei dem tangential verlaufenden Strahl eine Häufung der Amplitude stattfindet. Es leuchtet anschaulich ein, daß jede ebene bogenförmige (an sich gleichmäßige) Strahleranordnung für eine willkürliche Richtung ihrer Ebene (Peilebene) wie eine Strahlerstrecke mit unsymmetrisch verteilter Amplitude wirkt und daher eine Richtcharakteristik ohne Nullstellen liefert. Liegt die Strahleranordnung nicht oder nicht ganz in der Peilebene, so ist ihre Projektion auf die Peilebene maßgebend.

Einige typische Charakteristiken in Polarkoordinaten

Zur vergleichenden Betrachtung sind einige der besprochenen Charakteristiken in Polarkoordinaten umgerechnet und in Abb. 23—27 dargestellt. Der Zusammenhang zwischen dem Betrag der Charakteristik und der zugehörigen

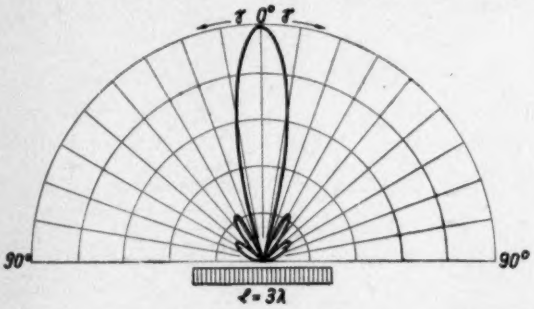

Abb. 23. Charakteristik einer rechteckigen Strahlerfläche $l = 3\lambda$; $R = f(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$; $\varphi = \dfrac{\pi \cdot l \sin\gamma}{\lambda}$

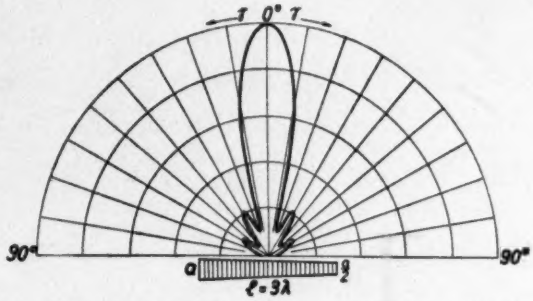

Abb. 24. Charakteristik einer trapezförmigen Strahlerfläche $l = 3\lambda$; $R = \sqrt{f^2_{(\varphi)} + \left(\frac{1}{3} f'_{(\varphi)}\right)^2}$

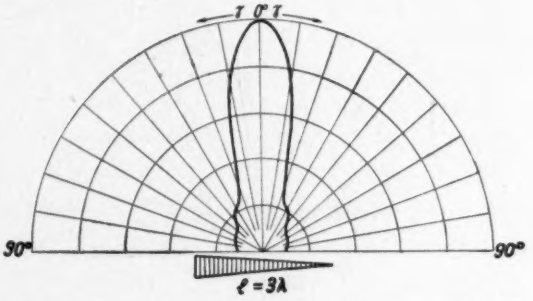

Abb. 25. Charakteristik einer dreieckigen Strahlerfläche $l = 3\lambda$; $R = \sqrt{f^2_{(\varphi)} + f'^2_{(\varphi)}}$

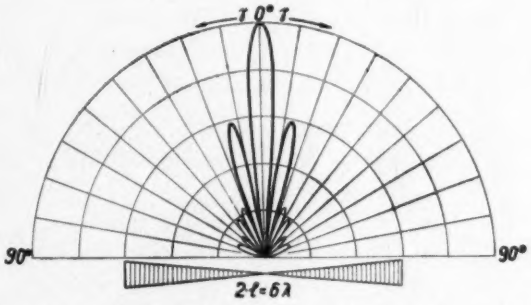

Abb. 26. Charakteristik einer endverstärkten Strahlerfläche $2l = 6\lambda$; $R = 2 \cdot \dfrac{\sin 2\varphi}{2\varphi} - \left(\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2$

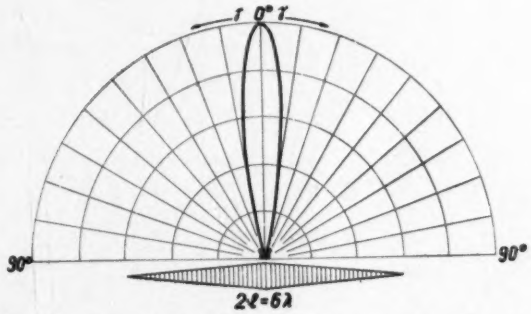

Abb. 27. Charakteristik einer mittenverstärkten Strahlerfläche $2l = 6\lambda$; $R = f^2_{(\varphi)}$

Richtung in der Peilebene tritt bei dieser Darstellung unmittelbar anschaulich hervor. Allerdings muß dabei das Verhältnis $\frac{l}{\lambda}$ zahlenmäßig festgelegt werden, während bei der Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten der Wert von $\frac{l}{\lambda}$ zunächst gleichgültig ist und nur darüber entscheidet, bis zu welchem Betrag $\varphi = \frac{\pi l}{\lambda} \sin \gamma$ (bei $\gamma = 90^0$) anwächst. In den Abb. 23—27 ist $l = 3\,\lambda$ gewählt. Abb. 23 zeigt die bekannte Charakteristik für gleichmäßige Amplitudenverteilung; die Abb. 24 und 25 lassen erkennen, wie bei zunehmender Asymmetrie der Amplitudenverteilung die Minima (von Nullstellen ausgehend) sich heben und schließlich mit den Nebenmaxima verschmelzen, während diese ihre Lage und ihren Betrag behalten. In den Abb. 26 und 27 kommt der große Einfluß der Amplitudenverteilung auf die Charakteristik besonders auffällig zum Ausdruck: Schwächung der Mitte bewirkt große (und zahlreichere) Nebenmaxima und gute Peilschärfe des Hauptmaximums; Verstärkung der Mitte bewirkt kleine Nebenmaxima und geringere Peilschärfe des Hauptmaximums.

Zusammenfassung

1. Die Richtcharakteristik einer ebenen Strahlerfläche von der Form eines Trapezes (Dreiecks) und eines Parallelogramms (Rechtecks, Rhombus, Quadrats) wird festgestellt, wenn die Peilebene senkrecht auf der Fläche steht, und zwar beim Trapez in Richtung der Parallelseiten, beim Parallelogramm in jeder Richtung; für das Rechteck auch in seiner eigenen Ebene. — Eine Strahlerstrecke mit entsprechender Amplitudenverteilung liefert dieselbe Charakteristik.

2. Wenn bei einer Strahlerstrecke (oder entsprechenden Strahlerfläche) die Amplitude von der Mitte aus symmetrisch nach den Enden zu abnimmt, so sind die Nebenmaxima schwächer als bei gleichmäßiger Amplitude. Es wird gezeigt, daß und wie man die Nebenmaxima unter jeden vorgeschriebenen Betrag herabdrücken kann. Die Einbuße an Peilschärfe kann durch entsprechende Verlängerung der Anordnung ausgeglichen werden.

3. Es wird gezeigt, wie man praktisch-technisch durch stufenweisen Abfall der Amplitude die Nebenmaxima fast ganz unterdrücken kann.

4. Die Richtcharakteristik einer trapezförmigen Strahlerfläche quer zu den Parallelseiten wird festgestellt; dem entspricht eine Strahlerstrecke, bei der die Amplitude vom einen zum andern Ende linear abnimmt. Die Nebenmaxima haben die gleiche Größe und Lage wie bei gleichmäßiger Amplitude; aber statt der Nullstellen treten nur Minima auf, die nach Lage und Betrag den Nebenmaxima um so näher rücken, je kürzer die kleine Parallelseite des Trapezes im Verhältnis zur großen ist.

5. Der „Strahlungsmittelpunkt" einer trapez- bzw. dreiecksförmigen Strahlerfläche wird festgestellt; unter Berücksichtigung seiner jeweiligen Lage kann man die Charakteristik einer Strahlerfläche berechnen, die sich aus Rechtecken, Trapezen und Dreiecken zusammensetzt, also auch die einer polygonförmigen Strahlerfläche.

6. Die Richtcharakteristik einer gleichmäßig besetzten Halbkreislinie wird berechnet und mit der einer Strahlerstrecke mit unsymmetrischer Amplitudenverteilung verglichen.

(Eingegangen am 25. September 1940.)

Zur thermischen Dämpfung von Schallwellen in staub- und nebelhaltiger Atmosphäre

Von H. Pfriem, VDI

Aus der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof, Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik

(Mit 4 Textabbildungen)

Inhaltsangabe

Infolge der relativ großen Wärmekapazität von Schwebeteilchen in der Atmosphäre wird der umgebenden Luft bei der Verdichtung durch eine Schallwelle Wärme entzogen und bei der Ausdehnung wieder zugeführt. Da dieses Wärmespiel mit einer bestimmten Nacheilung gegenüber der Druckschwingung erfolgt, wirkt es dämpfend auf die Schallschwingungen. Die Verdampfung von Wasser an der Oberfläche von Nebelteilchen unterstützt diese Wirkung infolge der großen Verdampfungswärme. Dieser periodische Wärme- und Stoffaustausch hat außerdem einen, wenn auch nur untergeordneten Einfluß auf die elastischen Eigenschaften der Luft. Diese thermisch bedingte Dämpfung und Änderung der Federung der Atmosphäre durch Schwebeteilchen wird für relativ zum Gas ruhende Teilchen auf Grund der Theorie der Wärmeleitung und Diffusion berechnet und für zwei Sonderfälle in dimensionslosen Schaubildern dargestellt.

I. Einführung

Schallwellen erfahren in einer Atmosphäre, die kleine Flüssigkeitströpfchen (Nebel) oder feste Körperchen (Staub) enthält, neben der klassischen[1a]) Dämpfung, der durch atmosphärische[1]) und innermolekulare[2]) Vorgänge bedingten Dämpfung sowie der Stoßdämpfung[3]) noch eine zusätzliche Abnahme ihrer Schwingungsenergie infolge der zwischen dem Gas und den in ihm schwebenden Teilchen vorhandenen Wechselwirkungen. Diese bestehen in periodischen Relativbewegungen[4]) und in gegenseitigem Wärme- und Stoffaustausch, die infolge endlicher Zähigkeit, Wärmeleit- und Diffusionsfähigkeit stets mit Verlusten an mechanischer Wellenenergie verbunden sind. Während nun für die erstgenannten Dämpfungsursachen gut begründete Theorien bestehen, liegen für die zuletzt genannten zwei Ursachen im wesentlichen nur anschauliche Versuche von H. Mache[5]) vor. Im vorliegenden Aufsatz soll daher der Versuch gemacht werden, diese ihrem Wesen nach thermische Dämpfung von Schallwellen theoretisch zu erfassen.

Die Vorgänge spielen sich bei der durch eine Schallwelle verursachten Verdichtung des Gas-Dampfgemisches in der Atmosphäre in der Weise ab, daß zunächst infolge der ansteigenden Temperatur des Gemisches Wärme an die Schwebeteilchen abgegeben wird und diese dadurch also eine geringe Temperaturerhöhung erfahren; damit steigt dann der Dampfdruck an ihrer Oberfläche durch Verdampfung von sehr geringen Flüssigkeitsmengen. Infolge des dadurch bestehenden Partialdruckgefälles nach dem umgebenden Gasraum hin wird ein Teil

[1a]) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 134 (1868), S. 177; s. a. Wien-Harms, Hdb. Exp.-Physik XVII. 2.

[1]) Tyndall, Der Schall, Braunschweig 1897.

[2]) H. O. Kneser, Z. techn. Phys. 16 (1935), S. 213.

[3]) Als „Stoßdämpfung" wird hier kurz die mit der Formänderung einer Druckwelle (infolge temperaturabhängiger Schallgeschwindigkeit) verbundene Vergrößerung der Dämpfung bezeichnet. Vgl. hierzu: R. D. Fay, J. Acous. Soc. Am. Bd. 3 (1931/32), S. 222 und H. Pfriem demnächst Akust. Z.

[4]) E. Hiedemann, Kolloid-Z. 77 (1936), S. 103, 129, 168, und „Verfahrenstechnik", Beiheft Z. VDI., Nr. 5 (1938), S. 149.

[5]) H. Mache, Über die Absorption des Schalles in nebeliger Luft und in der freien Atmosphäre. Meteor. Z. 50 (1933), S. 393.

des Dampfes in diesen hinein diffundieren. Bei der dann folgenden Expansion ergibt sich ganz entsprechend eine Umkehrung der Vorgänge. Da die Verdampfung und Kondensation stets mit einer bestimmten Phasenverzögerung hinter der erzwungenen Druckschwingung hereilt, ist damit notwendig eine Dämpfung verbunden. Aber auch ohne die Verdampfung von Flüssigkeit besteht bei festen Schwebeteilchen infolge ihrer zeitlich nacheilenden periodischen Erwärmung und Abkühlung durch das sie umgebende Gas eine Dämpfung[6]). Es ist offensichtlich, daß diese thermischen Wirkungen sehr wesentlich vom Bewegungszustand der Schwebeteilchen relativ zum umgebenden Gas abhängen. Die folgenden Entwicklungen beziehen sich zunächst nur auf Teilchen, die gegenüber ihrer Umgebung ruhen. Die Turbulenz des Gases soll dabei vernachlässigbar sein.

Neben der hier zunächst angestrebten Klärung des thermischen Einflusses von Schwebeteilchen auf die Schallübertragung, haben ähnliche Überlegungen beispielsweise auch für die Vorgänge beim Einspritzen von Brennstoff in den Verbrennungsraum einer Dieselmaschine oder bei der Verdampfung von zerstäubtem Brennstoff einer Vergasermaschine während der Verdichtung des Gemisches technische Bedeutung. Da hier jedoch auch der Relativbewegung der Brennstofftropfen gegenüber der Luft höhere Bedeutung zukommt und die Druckänderungen im Gasraum sehr groß sind, bestehen wesentlich verwickeltere Zusammenhänge. Hinzu kommt, daß die Brennstofftropfen vollständig verdampft werden bzw. verbrennen und damit die Änderung ihres Tropfendurchmessers wesentlich ist. Die vorliegenden Betrachtungen können daher nur als erste Entwicklungsstufe in dieser Richtung gewertet werden. Außerdem ermöglichen entsprechende Betrachtungen aber auch die näherungsweise Beurteilung des Einflusses von Gasdruckänderungen auf die Wärmeübertragung an mehr oder weniger gerundeten Ecken — z. B. den Kuppen von Zündelektroden usw. — in Brennkraftmaschinen und damit auf ihren Temperaturzustand[7]).

Die gegenseitige Koppelung von Druckschwingung, Wärmeübergang und Verdampfung bzw. Kondensation mit ihrer Rückwirkung auf den zeitlichen Druckverlauf kann naturgemäß keine allgemein gültigen, einfachen mathematischen Lösungen zur Folge haben. Eine Berechnung der genauen Zusammenhänge für beliebig große Druckschwankungen dürfte praktisch unmöglich sein. Im folgenden soll daher mit vereinfachenden Annahmen eine partielle Näherungslösung für sehr kleine harmonische Druckschwingungen gesucht werden. Unharmonische, kleine Druckschwingungen können daraus durch Überlagerung von entsprechend vielen harmonischen Partiallösungen berechnet werden.

II. Die Temperatur- und Dampfkonzentrationsfelder in der Umgebung eines Schwebeteilchens

1. Die Differentialgleichungen.

Für die nachstehenden Entwicklungen wird vorausgesetzt, daß Dampfdruck und Temperatur an der Flüssigkeitsoberfläche keine Phasendifferenz aufweisen, daß ferner im betrachteten Gasraum örtliche Druckunterschiede vernachlässigbar und außerdem Druck und Temperatur im ungestörten Gasraum stets phasengleich sind. Schließlich soll das Gas-Dampfgemisch bezüglich der Stoffeigenschaften als homogen und diese als unveränderlich angesehen werden. Die Schwebeteilchen sollen als vollkommene Kugeln aufgefaßt werden; ihre Entfernung voneinander wird so groß vorausgesetzt, daß die um sie entstehenden Temperatur- und Partialdruckfelder sich gegenseitig praktisch nicht beeinflussen und daher unabhängig voneinander berechnet werden dürfen. Ein Kondensationskern soll daher als Kugel in einem all-

[6]) Vgl. hierzu auch H. Pfriem, Die thermische Dämpfung in Mikrophonluftspalten. Akust. Z. 5 (1940), S. 103.

[7]) Die entsprechenden ebenen Probleme wurden behandelt in: H. Pfriem, Der periodische Wärmeübergang bei kleinen Druckschwankungen. Forsch. Ing.-Wes. 11 (1940), S. 67, und Der stationäre Wärmeübergang bei kleinen Druckschwankungen. Forsch. Ing.-Wes. 11 (1940), S. 134 und 202; Auszug: Z. d. VDI. Bd. 49 (1940), S. 962.

seitig ausgedehnten Gasraum angesehen werden. Diese Annahme dürfte praktisch um so eher zutreffen, je höher die Frequenz der Schwingung ist. Die Druckschwingungen sollen dabei durch die folgende Gleichung vorgegeben sein[8]):

$$P - P_1 = \Delta P\, e^{j\omega\tau},$$

wenn bedeuten:

τ (h)	die Zeit,
ω (1/h)	die Kreisfrequenz,
P (kg/m²)	der absolute Gasdruck,
P_1 (kg/m²)	der Zeitmittelwert des absoluten Gasdruckes,
ΔP (kg/m²)	die Schwingungsweite der Druckschwingung,
$j = \sqrt{-1}$ und	e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Für das Temperaturfeld in der Umgebung einer Kugel gilt dann die früher schon entwickelte Differentialgleichung[9]):

$$(1)\qquad \frac{\partial(r\,\vartheta)}{\partial\tau} = a_1 \frac{\partial^2(r\,\vartheta)}{\partial r^2} + r A \frac{v_1}{c_{p_1}} \Delta P \cdot j\omega e^{j\omega\tau}.$$

Dabei deutet der Zeiger 1 stets auf die Zustände im Gasraum und der Zeiger 2 ist den Eigenschaften des Schwebeteilchens vorbehalten; ferner ist

r (m)	der Ortsvektor eines Raumpunktes,
ϑ (° C)	die Übertemperatur über dem Zeitmittelwert der Temperatur des Gases,
a (m²/h)	die Temperaturleitfähigkeit,
v (m³/kg)	das spezifische Volumen,
c_p (kcal/kg ° C)	die spezifische Wärme bei unveränderlichem Druck und
A (kcal/mkg)	das mechanische Wärmeäquivalent.

Für das Konzentrationsfeld des Dampfes in der Umgebung eines Kondensationskernes gilt die folgende Differentialgleichung[10]):

$$(2)\qquad \frac{\partial(r\,\gamma)}{\partial\tau} = k \frac{\partial^2(r\,\gamma)}{\partial r^2},$$

wenn:

γ (kg/m³)	die Konzentration des Dampfes im Gasraum und
k (m²/h)	die Diffusionszahl des Dampfes im Gas ist.

Für das quell- und konvektionsfreie Temperaturfeld im Schwebeteilchen gilt die einfache Differentialgleichung der Wärmeleitung:

$$(3)\qquad \frac{\partial(r\,t)}{\partial\tau} = a_2 \frac{\partial^2(r\,t)}{\partial r^2},$$

wenn:

t (° C)	die Übertemperatur des Teilchens über seinem Zeitmittelwert ist.

Als Randbedingung besteht an der Teilchenoberfläche $r = r_{12}$ zunächst die Wärmebilanz:

$$(4)\qquad -\lambda_1 \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{r_{12}} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r_{12}} + k\,w \left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_{r_{12}}.$$

Ferner gilt für $r = r_{12}$ die Gleichheit der Temperaturen des Gases und der Flüssigkeit, sowie die Dampfkonzentrationskurve, die hier durch die Tangente im Gleichgewichtspunkt angenähert wird; also:

$$(5)\qquad t_{12} = \vartheta_{12} \text{ und } \gamma_{12} - \gamma_0 = \Gamma \cdot t_{12} = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)_0 t_{12}.$$

Dabei ist:

λ (kcal/mh °C)	die Wärmeleitfähigkeit,
w (kcal/kg)	die Verdampfungswärme[11]) der Flüssigkeit und
$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)_0 = \Gamma$ (kg/m³ °C)	die Neigung der Tangente im Gleichgewichtspunkt der Dampfkonzentrationskurve[11]).

Die Größe Γ ergibt sich infolge des meist sehr geringen Dampfdruckes auf Grund der Gasgleichung und der CLAUSIUS-CLAPEYRONschen Gleichung[12]) zu:

$$(6)\qquad \Gamma \cong \frac{1}{R_D T_2^2}\left[\frac{w}{A\,(v'' - v')} - P_s\right] \approx \frac{1}{T_2 v''}\left[\frac{w}{A\,R_D T_2} - 1\right].$$

[8]) Bei allen folgenden komplexen Gleichungen stellt stets der Real- oder Imaginärteil für sich eine physikalische Lösung dar.

[9]) H. PFRIEM, Die thermische Dämpfung von kugelsymmetrisch schwingenden Gasblasen. Akust. Z. 5 (1940), S. 202.

[10]) Vgl. z. B. EUCKEN und JAKOB, Der Chemie-Ingenieur I. 1, Akad. Verl.-Ges. 1933, S. 250, 265, 282.

[11]) Die Verdampfungswärme der Flüssigkeit und die Neigung der Tangente im Gleichgewichtspunkt an die Dampfkonzentrationskurve sind dabei um den entsprechenden Einfluß der Oberflächenspannung bzw. der Dampfdruckerniedrigung durch gelöste Salze zu korrigieren. Vgl. hierzu für Nebel: A. u. K. WEGENER, Physik der Atmosphäre, Verlag J. A. Barth, Leipzig 1935, S. 38.

[12]) Vgl. hierzu: E. SCHMIDT, Einführung in die technische Thermodynamik, Springer (1936), S. 151.

Dabei bedeuten:

R_D (m/° K) die Gaskonstante des Dampfes,
$T_2 \approx T_1$ (° K) der Zeitmittelwert der absoluten Temperatur,
v'' bzw. v' (m³/kg) die spezifischen Volumina des trocken gesättigten Dampfes bzw. der Flüssigkeit,
P_s (kg/m²) der zur Temperatur T_2 gehörige Sättigungsdampfdruck der Flüssigkeit.

Damit können alle Eigenschaften des Gases und der Flüssigkeit bekannten Tabellenwerken entnommen werden.

2. Die Lösung für ein Schwebeteilchen

Die mathematischen Funktionen für das Temperatur- und Dampfkonzentrationsfeld in und außerhalb eines kugelförmigen Schwebeteilchens müssen neben der Erfüllung der vorstehenden Differentialgleichungen und Randbedingungen noch der Forderung genügen, daß die innerhalb des Teilchens geltenden für $r = 0$ und die im Gasraum geltenden Beziehungen für $r \to \infty$ mit ihren Ableitungen keine unendlich großen Werte aufweisen. Wie man sich leicht überzeugt, lautet eine Partiallösung für das harmonische Temperaturfeld im Gasraum[13]):

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1 - \frac{r_{12}}{r} \frac{1-\varrho_{12}}{2} e^{-\psi_1 (r - r_{12})} \right\}, \tag{7}$$

wobei $r \geq r_{12}$ ist, ferner bedeuten:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{j\omega}{a_1}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2 a_1}} = (1+j)\varphi_1,$$

ϱ_{12} die Reflexionszahl der Temperaturwellen an der Kugeloberfläche und

$$\vartheta_0 = A \frac{v_1 \Delta P e^{j\omega\tau}}{c_{p_1}} \text{ (°K)}$$

die Temperaturschwingung im ungestörten Gasraum.

Für das Temperaturfeld innerhalb der Kugel ergibt sich entsprechend:

$$t = \vartheta_0 \frac{r_{12}}{r} \frac{1+\varrho_{12}}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\, \psi_2 r}{\mathfrak{Sin}\, \psi_2 r_{12}}, \tag{8}$$

wobei $r \leq r_{12}$ und

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{j\omega}{a_2}} = (1+j) \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2 a_2}} = (1+j)\varphi_2$$

ist.

Das Feld der Dampfkonzentration in der Umgebung der Kugel wird schließlich:

$$\gamma - \gamma_0 = \vartheta_0 \frac{r_{12}}{r} \frac{1+\varrho_{12}}{2} \Gamma \cdot e^{-\Psi (r - r_{12})}, \tag{9}$$

wenn $r \geq r_{12}$, γ_0 der Zeitmittelwert von γ und

$$\Psi = \sqrt{\frac{j\omega}{k}} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2k}} = (1+j)\Phi$$

ist. Durch Einsetzen in die entsprechende Differentialgleichung kann der Nachweis, daß diese Gleichungen Partiallösungen darstellen, ohne Schwierigkeiten geführt werden. Die Erfüllung der Randbedingungen an der Kugeloberfläche nach Gleichung (5) kann man mit $r = r_{12}$ ohne weiteres erkennen. Es bleibt also nur noch der Nachweis der Wärmebilanz an der Kugeloberfläche nach Gleichung (4). Für die örtlichen Änderungen an der Kugeloberfläche findet man zunächst die Beziehungen:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r_{12}} = \frac{\vartheta_0}{r_{12}} \cdot \frac{1-\varrho_{12}}{2} (\psi_1 r_{12} + 1), \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r_{12}} = \frac{\vartheta_0}{r_{12}} \frac{1+\varrho_{12}}{2} (\psi_2 r_{12} \mathfrak{Ctg}\, \psi_2 r_{12} - 1), \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right)_{r_{12}} = -\frac{\vartheta_0}{r_{12}} \cdot \frac{1+\varrho_{12}}{2} \Gamma (\Psi r_{12} + 1). \tag{12}$$

Setzt man diese Werte in die Wärmebilanz nach Gl. (4) ein, so erhält man die Bedingung für die Reflexionszahl ϱ_{12} zu:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (1 - \varrho_{12}) (\psi_1 r_{12} + 1) \\ &\quad = (1 + \varrho_{12}) [\lambda_2 (\psi_2 r_{12} \mathfrak{Ctg}\, \psi_2 r_{12} - 1) \\ &\qquad + k w \Gamma (\Psi r_{12} + 1)]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Reflexionszahl ϱ_{12} für Temperaturwellen an einem kugelförmigen Flüssigkeitstropfen zu:

$$\varrho_{12} = \frac{\lambda_1 (\psi_1 r_{12} + 1) - [\lambda_2 (\psi_2 r_{12} \mathfrak{Ctg}\, \psi_2 r_{12} - 1) + k w \Gamma (\Psi r_{12} + 1)]}{\lambda_1 (\psi_1 r_{12} + 1) + [\lambda_2 (\psi_2 r_{12} \mathfrak{Ctg}\, \psi_2 r_{12} - 1) + k w \Gamma (\Psi r_{12} + 1)]} \tag{13}$$

An Hand der Gl. (7), (8), (9) und (13) kann man also das Temperatur- und Dampfkonzentrationsfeld für kugelförmige Tropfen einer Flüssigkeit bei harmonisch schwankendem Gasdruck berechnen. Man kann daher auch die infolge der Wärmeleitung an der Tropfenoberfläche je

[13]) Die Grundlagen für die Entwicklung dieser Lösungen sind enthalten in: H. PFRIEM, Beitrag zur Theorie der Wärmeleitung bei periodisch veränderlichen Temperaturfeldern. Ing.-Arch. 6 (1935), S. 97.

Zeiteinheit übergehende Wärmemenge W leicht bestimmen. Zählt man die zum Gas strömende Wärme als positiv, so ergibt sich:

$$\frac{dW}{d\tau} = -4\,r_{12}^2\,\pi\,\lambda_1\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{r_{12}}.$$

In Verbindung mit Gl. (10) erhält man also für die von einer Flüssigkeitskugel an den umgebenden Gasraum abgegebene Wärmemenge die Beziehung:

$$\frac{dW}{d\tau} = -2\,r_{12}\,\pi\,\vartheta_0\,\lambda_1\,(1-\varrho_{12})\,(\psi_1 r_{12}+1). \tag{14}$$

Für die an der Kugeloberfläche verdampfende Flüssigkeitsmenge G ergibt sich ganz allgemein:

$$\frac{dG}{d\tau} = -4\,r_{12}^2\,\pi\,k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right)_{r_{12}},$$

mit Hilfe der Gl. (12) erhält man daher:

$$\frac{dG}{d\tau} = 2\,r_{12}\,\pi\,\vartheta_0\,(1+\varrho_{12})\,k\,\Gamma\,(\Psi r_{12}+1). \tag{15}$$

Damit sind also nach Gl. (14) die periodischen Wärmeschwingungen und nach Gl. (15) die periodisch verdampfenden Flüssigkeitsmengen an der Tropfenoberfläche unter dem Einfluß von Schwankungen des Gasdruckes bekannt. Man kann daher auch ihren Einfluß auf die Volumenänderungen des umgebenden Gases ermitteln.

Für feste, trockene Schwebeteilchen wird die Änderung der Dampfkonzentration mit der Temperatur an ihrer Oberfläche Null, d. h. also, es wird $\Gamma = 0$; alle bisher entwickelten Beziehungen behalten auch hierfür volle Gültigkeit. Bevor die Entwicklungen weiter geführt werden, sollen im folgenden Abschnitt noch kurz die Grenzen ihrer Gültigkeit betrachtet werden.

3. Grenzen der Gültigkeit

Eine untere Grenze der Gültigkeit der vorstehenden Entwicklungen ergibt sich aus der stillschweigenden Voraussetzung einer vollkommen stetigen Materie. Sobald daher die Größe der Schwebeteilchen mit molekularen Abmessungen annähernd vergleichbar wird, sind die Schlußfolgerungen mit Vorsicht aufzunehmen. Bei sehr vielen kleinsten Schwebeteilchen im betrachteten gesamten Raum wird sich infolge statistischer Mittelwertbildungen aber auch hierbei eine wesentliche Erweiterung dieser Grenze ergeben, solange die Zahl der Schwebeteilchen noch genügend klein ist im Vergleich zur Zahl der Gasmolekel im gleichen Raum. Dies dürfte praktisch immer der Fall sein, so daß also bei Betrachtung genügend großer Räume — wie sie für die atmosphärische Schallausbreitung fast immer gegeben sind — praktisch keine untere Grenze bezüglich der Abmessungen der Schwebeteilchen besteht.

Eine obere Grenze für die Abmessungen der Schwebeteilchen ist durch ihre zu große Massenträgheit gegeben, wodurch sie den makroskopischen Bewegungen des umgebenden Gases — der Gasschnelle — nicht mehr in ausreichendem Maße folgen und daher also Relativbewegungen zu diesem ausführen. Nach HIEDEMANN[4]) ist das als Mitführungswert definierte Verhältnis der Schwingungsweite X_p eines Nebelteilchens zur Schwingungsweite X_q eines Gasteilchens berechenbar aus der Beziehung:

$$\frac{X_p}{X_q} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{9}\,\frac{r_{12}^2\,\omega}{\nu_1}\right)^2}}.$$

Dabei ist ν_1 (m²/sec) die kinematische Zähigkeit des Gases. Die vorliegenden Entwicklungen gelten nur für $\frac{X_p}{X_q} \approx 1$, also für:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\,\frac{r_{12}^2\,\omega}{\nu_1}\right)^2 \ll 1.$$

Für zweiatomige Gase ist in guter Näherung $\nu_1 \approx \frac{3}{4}\,a_1$, so daß man im Hinblick auf Relativbewegungen der Schwebeteilchen als obere Grenze für die Gültigkeit der vorliegenden Entwicklungen bei Schallwellen im freien Gasraum praktisch erhält:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8}{27}\cdot\frac{r_{12}^2\,\omega}{a_1}\right)^2 \approx \frac{(r_{12}\,\varphi_1)^4}{6} \ll 1. \tag{16}$$

Eine weitere Beschränkung ergibt sich hinsichtlich der Zahl der Schwebeteilchen bzw. ihres gegenseitigen Abstandes durch die Voraussetzung, daß sich die Temperatur- und Konzentrationsfelder in ihrer Umgebung gegenseitig praktisch nicht beeinflussen dürfen. Nach Gl. (7) wird nun der Unterschied zwischen der Temperaturschwingung ϑ_0 im ungestörten Gasraum und der wirklichen Schwingung ϑ im Abstand

$r > r_{12}$ im Vergleich zu ϑ_0:

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta}{\vartheta_0} = \frac{r_{12}}{r} \cdot \frac{1-\varrho_{12}}{2} e^{-\Psi_1 (r - r_{12})} .$$

Läßt man als größten Betrag dieses Verhältnisses noch eine Abweichung von 1% zu[14]), so ergibt sich die Mindestentfernung E zweier benachbarter Schwebeteilchen mit $r = \frac{E}{2}$ aus der Bedingung:

$$(17) \qquad \left| (1-\varrho_{12}) \frac{r_{12}}{E} \cdot e^{-\Psi_1 \left(\frac{E}{2} - r_{12}\right)} \right| \lessapprox 10^{-2} .$$

Eine weitere Begrenzung der Verwendbarkeit der Ergebnisse entsteht durch die stillschweigende Voraussetzung, daß sich der Halbmesser eines Flüssigkeitstropfens bei der periodischen Verdampfung nicht wesentlich ändert. Es muß also die während einer Halbschwingung verdampfte bzw. kondensierte Flüssigkeitsmenge stets klein im Vergleich zum Gesamtgewicht des Tropfens sein. Durch Integration der Gl. (15) über eine halbe Schwingung findet man diese Flüssigkeitsmenge als absoluten Betrag von:

$$\Delta G_2 = \left| \frac{4 r_{12} \pi}{j \omega} \frac{A v_1}{c_{p_1}} \Delta P (1 + \varrho_{12}) k \Gamma (\Psi r_{12} + 1) \right| ,$$

wobei also

ΔG_2 (kg) die je Halbschwingung des Druckes verdampfende Flüssigkeitsmenge ist.

Das Gesamtgewicht des Tropfens ist:

$$G_2 = \frac{4}{3} \frac{r_{12}^3 \pi}{v_2} ;$$

es muß also sein:

$$(18) \frac{\Delta G}{G_2} = 3 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} v_2 T_1 \Gamma \frac{\Delta P}{P_1} \left| (1 + \varrho_{12}) \frac{\Psi r_{12} + 1}{(\Psi r_{12})^2} \right| \ll 1,$$

wenn $\varkappa = c_{p_1}/c_{v_1}$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases ist.

Nur wenn auch diese Bedingung noch erfüllt ist, sind die Vorausesetzungen dieser Entwicklungen gewährleistet, so daß man dann auch befriedigende Übereinstimmung der Ergebnisse mit der Wirklichkeit erwarten kann. Für feste Schwebeteilchen ist die letzte Bedingung mit $\Gamma = 0$ immer erfüllt. Außerdem erkennt man, daß sie auch durch genügend kleine Druckschwingungen immer erfüllbar ist. Im folgenden Abschnitt soll nun der Einfluß der periodischen Wärmeableitung und Verdampfung an einem Flüssigkeitstropfen auf die Raumänderungen des ihn umgebenden Gases berechnet werden.

III. Die Raumänderungen des Gases in der Umgebung eines Schwebeteilchens

In einem Gasraum, der eine bekannte Anzahl gleicher Schwebeteilchen in gleichmäßiger Verteilung enthält, kann man jedem dieser Teilchen einen zu ihrer Anzahl umgekehrt verhältnisgleichen Bruchteil des insgesamt enthaltenen Gasgewichtes zuordnen. Dieses einem bestimmten Schwebeteilchen als Mittelwert zugehörige „Gaselement" soll im folgenden näher betrachtet werden. Da in seiner Umgebung lauter gleichartige und den gleichen Zustand durchlaufende Gaselemente sein sollen, kann es thermisch nach außen hin als völlig abgeschlossenes System angesehen werden. Jedes derartige Gaselement steht aber mit dem von ihm eingeschlossenen Kern — infolge der von außen aufgezwungenen Druckschwankungen — in periodischem Wärme- und Stoffaustausch, der nach der Gl. (14) bzw. (15) berechenbar ist (Mengenzustandsänderung). Der erste Hauptsatz der Wärmelehre lautet nun, auf ein solches Gaselement angewendet:

$$i_D \frac{dG}{d\tau} + \frac{dW}{d\tau} = G \frac{du}{d\tau} + u_D \frac{dG}{d\tau} + A P \frac{dV}{d\tau} ,$$

[14]) Infolge der Linearität der Differentialgleichungen (1), (2) und (3) überlagern sich die Temperaturfelder benachbarter Schwebeteilchen zunächst additiv, so daß die angenommene Abweichung von 1% nicht einem Fehler von 1% entspricht. Durch die Voraussetzung, daß praktisch keine gegenseitige Beeinflussung der Felder von benachbarten Schwebeteilchen eintritt, werden lediglich die infolge des endlichen Durchmessers eines Tröpfchens an seiner Oberfläche reflektierten Grundfelder nicht mehr berücksichtigt. Für relativ sehr kleine Schwebeteilchen verschwinden daher die mit der Vereinfachung verbundenen Fehler ganz. Der nach Gl. (17) berechenbare Mindestabstand zweier Teilchen darf daher für die in den meisten technischen Fällen notwendige Genauigkeit weit unterschritten werden.

wenn

u (kcal/kg)	der räumliche Mittelwert der inneren Energie der Gewichtseinheit des Gases im Element,
u_D (kcal/kg)	die innere Energie und
i_D (kcal/kg)	die Enthalpie der Gewichtseinheit des entstehenden Dampfes,
G (kg)	das Gasgewicht und
V (m³)	das Volumen des Gaselementes ist.

Unter „Gas" ist dabei jeweils das Gas-Dampfgemisch zu verstehen. Praktisch kann man nun für die fraglichen, sehr kleinen Dampfdrücke $i_D - u_D = A\,R_D\,T_1$ setzen, wenn R_D die „Gaskonstante" des Dampfes und T_1 der Zeitmittelwert der absoluten Temperatur ist. Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung findet man so die zeitliche Änderung des Volumens des Gaselementes aus:

$$(19)\quad \frac{dV}{d\tau} = \frac{1}{A\,P_1}\left\{\frac{dW}{d\tau} + A\,R_D\,T_1\frac{dG}{d\tau} - G_1\frac{du}{d\tau}\right\},$$

wobei die Zustände mit Zeiger die Zeitmittelwerte der betreffenden Größen darstellen. Auf der rechten Seite dieser Gl. (19) ist zunächst nur noch die Änderung des räumlichen Mittelwertes der inneren Energie der Gewichtseinheit des Gases im Element $\left(\frac{du}{d\tau}\right)$ unbekannt. Nun ist aber das Temperaturfeld im Element nach Gl. (7) gegeben, so daß damit diese Änderung der inneren Energie als räumlicher Mittelwert berechenbar ist. Allgemein ist (von einer Konstanten abgesehen):

$$u = c_v\,\vartheta;$$

es wird also:

$$G_1 u = \int_{r_{12}}^{r} \frac{c_v}{v}\,4\pi r^2\,\vartheta\,dr$$

$$= 4\pi\int_{r_{12}}^{r}\frac{c_v}{v}\,r^2\,\vartheta_0\,dr - 4\pi\int_{r_{12}}^{r}\frac{c_v}{v}\,r^2\,(\vartheta_0-\vartheta)\,dr.$$

Da nach Voraussetzung $\Delta P \ll P_0$ und damit $|\vartheta_0| \ll T_0$ ist, darf man hierin unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung $c_v = c_{v_1}$ und $v = v_1$, also den entsprechenden Zeitmittelwerten gleichsetzen; man findet so mit Gl. (7):

$$G_1 u \cong \frac{4\pi\,(r^3 - r_{12}^3)}{3\,v_1}\,c_{v_1}\,\vartheta_0$$

$$- 2\pi\frac{c_{v_1}}{v_1}\,r_{12}\,\vartheta_0\,(1-\varrho_{12})\int_{r_{12}}^{r} r\,e^{-\psi_1(r-r_{12})}\,dr.$$

Hierin ist nun $\frac{4\pi\,(r^3 - r_{12}^3)}{3\,v_1} = G_1$; das noch auszuführende Integral stellt ferner den Mittelwert der Abweichung im Temperaturfeld in der Umgebung des Schwebeteilchens infolge seiner Wärmeableitung dar und muß entsprechend den Voraussetzungen bei der Berechnung dieses Temperaturfeldes von r_{12} bis $r \to \infty$ integriert werden. Man findet daher für den räumlichen Mittelwert der inneren Energie der Gewichtseinheit des Gases im betrachteten Element die Beziehung:

$$u = c_{v_1}\,\vartheta_0 + \frac{4\pi\,c_{v_1}}{G_1 v_1}\,r_{12}\,\vartheta_0\,\frac{1-\varrho_{12}}{2}\cdot\left[\frac{r}{\psi_1}\,e^{\psi_1(r-r_{12})} + \frac{e^{-\psi_1(r-r_{12})}}{{\psi_1}^2}\right]_{r_{12}}^{\infty}$$

$$= c_{v_1}\,\vartheta_0 - \frac{2\pi\,r_{12}^2\,c_{v_1}}{G_1 v_1}\cdot\frac{\vartheta_0}{\psi_1}\cdot\frac{1-\varrho_{12}}{2}\left[1 + \frac{1}{r_{12}\,\psi_1}\right],$$

Daraus erhält man die zeitliche Änderung der inneren Energie des Gaselementes:

$$(20)\quad \frac{du}{d\tau} = j\,\omega\,c_{v_1}\,\vartheta_0\left\{1 - \frac{4\pi\,r_{12}^3}{3\,G_1 v_1}\cdot\frac{3}{2}\,(1-\varrho_{12})\,\frac{1+\psi_1 r_{12}}{(\psi_1 r_{12})^2}\right\}.$$

Setzt man diesen Wert in Verbindung mit den Gl. (14) und (15) in die Gl. (19) ein, so findet man die Raumänderung des Gaselementes

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{j\,\omega\,\vartheta_0\,c_{v_1}}{A\,P_1\,v_1}\left[V_1 + \frac{\varkappa_1 - 1}{(\psi_1 r_{12})^2}\,(1+\psi_1 r_{12})\,3\,\frac{1-\varrho_{12}}{2}\cdot\frac{4}{3}\,r_{12}^3\,\pi\right]$$

$$+ 4\,r_{12}\,\pi\,v_1\,k\,\Gamma\,\vartheta_0\,\frac{1+\varrho_{12}}{2}\,[\Psi\,r_{12} + 1],$$

wenn $V_1 = G_1 v_1$ (m³) der Zeitmittelwert des Volumens des Gaselementes, also der statistische Mittelwert eines Gasraumes ist, der ein Schwebeteilchen vom Halbmesser r_{12} enthält. Durch Integration nach der Zeit ergibt sich schließlich das zeitveränderliche Volumen dieses Gaselementes:

$$(21) \qquad V_1 - V = \frac{\vartheta_0}{T_1}\left[\frac{V_1}{\varkappa - 1} + \frac{3}{2} V_2 (1 - \varrho_{12}) \frac{1 + \psi_1 r_{12}}{(\psi_1 r_{12})^2}\right] - \frac{3}{2} V_2 v_1 \Gamma \vartheta_0 (1 + \varrho_{12}) \frac{\Psi r_{12} + 1}{(\Psi r_{12})^2},$$

wenn T_1 (° K) der Zeitmittelwert der absoluten Temperatur im Gasraum und V_2 (m³) das Volumen des Schwebeteilchens ist. Damit ist auch die zu den vorgegebenen Druckänderungen gehörige Raumänderung des Gases unter Berücksichtigung der Wärmeableitung und Verdampfung an den in ihm enthaltenen Schwebeteilchen bekannt. Daher ist es nun möglich, auch die Schwingungseigenschaften derartiger Gasräume zu berechnen.

IV. Die Schwingungseigenschaften eines Gases mit Schwebeteilchen

1. Allgemeine Entwicklungen

Die Raumänderungen eines Schwebeteilchen enthaltenden Gases sollen zur Bestimmung seiner Schwingungseigenschaften mit den Zwangsschwingungen eines idealisierten masselosen, gedämpften Gasraumes verglichen werden; für diesen erhält man bei harmonischer Anregung die folgende Differentialgleichung:

$$K \cdot \frac{dV}{d\tau} + C V + F \Delta P e^{j\omega\tau} = 0,$$

wobei

K (kg sec/m³)	die Dämpfungskonstante,
C (kg/m³)	die elastische Konstante dieses Systems und
F (m²)	die Angriffsfläche der Zwangsdrücke ist.

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung lautet bekanntlich:

$$(22) \quad V_1 - V = \frac{F \Delta P e^{j\omega\tau}}{C + j K \omega} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot F \frac{\vartheta_0}{T_1} \frac{P_1}{C + j K \omega}.$$

Vergleicht man diese Lösung mit dem Ergebnis nach Gl. (21), so findet man eine komplexe Beziehung für die Berechnung der Dämpfungskonstante K und der elastischen Konstante C des betrachteten Gasraumes von folgender Form:

$$(23) \quad \frac{1}{C + j K \omega} = \frac{V_1}{F \varkappa P_1}\left[1 + \frac{V_2}{V_1} \frac{3}{2} (\varkappa - 1) \mathfrak{Y}\right],$$

wobei bedeutet:

$$\mathfrak{Y} = (1 - \varrho_{12}) \frac{\psi_1 r_{12} + 1}{(\psi_1 r_{12})^2} - v_1 T_1 \Gamma (1 + \varrho_{12}) \frac{\Psi r_{12} + 1}{(\Psi r_{12})^2}.$$

Zur Berechnung von Zahlenwerten muß man diese Beziehung in Real- und Imaginärteil bzw. in Argument und absoluten Betrag trennen. Aus der Gleichheit der Argumente beider Gleichungsseiten findet man zunächst die dimensionslose Kenngröße $\frac{K\omega}{C}$, die mit π multipliziert dem logarithmischen Dämpfungsdekrement einer abklingenden Eigenschwingung von der Frequenz ω entspricht. Da auch die Reflexionszahlen komplex sind, wird die Berechnung von Zahlenwerten für die Schwingungseigenschaften eines Gases unter dem Einfluß von kleinen, gleichmäßig verteilten Schwebeteilchen im allgemeinen sehr umständlich.

Der einfachste Grenzfall der Gl. (23) ist $V_2 = 0$, d. h. also keine Schwebeteilchen im Gasraum. Dabei wird

$$\frac{1}{C + j K \omega} = \frac{V_1}{F \varkappa P_1};$$

die Dämpfung verschwindet also in diesem Fall ($K = 0$) und die elastische Konstante ergibt sich daher zu:

$$C = \frac{F \varkappa P_1}{V_1}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis beispielsweise mit dem entsprechenden für ebene ungedämpfte Schallwellen, so findet man für das Verhältnis $\frac{F}{V_1}$ die Beziehung:

$$(24a) \qquad \frac{F}{V_1} = \frac{\omega}{c},$$

wenn c (m/sec) die Schallgeschwindigkeit im Gasraum ist.

Für schwingende Gasblasen[15]) in einer Flüssigkeit, in deren Gasraum sich kleine

[15]) Vgl. z. B. H. PFRIEM, siehe Fußnote 9.

Schwebeteilchen befinden, wird andererseits:

$$\frac{F}{V_1} = \frac{3}{R}, \tag{24b}$$

wenn R (m) der Halbmesser der Gasblase ist.

In der Akustik wird meist ein auf den Weg der Welle bezogener Dämpfungsfaktor verwendet, der bei einer ebenen Welle durch folgende Beziehung definiert ist:

$$J = J_0 \cdot e^{-\alpha \cdot x} \quad \text{bzw.} \quad \Delta P = \Delta P_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} \cdot x};$$

dabei bedeutet:

J bzw. J_0	die Intensität der Welle in den Raumpunkten x bzw. $x = 0$,
ΔP bzw. ΔP_0	die Schwingungsweite des Druckes in den gleichen Punkten und
$\alpha\left(\frac{1}{m}\right)$	der auf den Weg der Welle bezogene Dämpfungsfaktor.

Setzt man hierin $x = \frac{2\pi c}{\omega}$, also gleich einer Wellenlänge (entsprechend einer vollen Schwingung), so ergibt sich der Zusammenhang zwischen α und $\left(\frac{K\omega}{C}\right)$ in der Form:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \cdot \left(\frac{K\omega}{C}\right). \tag{25}$$

Infolge der vielen Parameter besteht die Schwierigkeit, die Ergebnisse nach Gl. (23) allgemein gültig und anschaulich darzustellen. Daher wird nachstehend diese Gl. (23) für zwei Sonderfälle näher untersucht; zunächst werden dabei die entsprechend einfacheren Beziehungen für feste, d. h. also nicht verdampfbare Schwebeteilchen und schließlich noch die für Wassertropfen in Luft entwickelt.

2. *Feste Schwebeteilchen*

a) Die Reflexionszahlen für Temperaturwellen. Für feste Schwebeteilchen im Gasraum (Staubteilchen bzw. Tropfen von Flüssigkeiten, die einen sehr niedrigen Dampfdruck aufweisen) wird im allgemeinen $\Gamma = 0$. Damit ergibt sich die Reflexionszahl ϱ_{12} für die Temperaturwellen nach Gl. (13) aus der Beziehung:

$$\varrho_{12} = \frac{\lambda_1(\psi_1 r_{12} + 1) - \lambda_2[\psi_2 r_{12} \operatorname{Ctg} \psi_2 r_{12} - 1]}{\lambda_1(\psi_1 r_{12} + 1) + \lambda_2[\psi_2 r_{12} \operatorname{Ctg} \psi_2 r_{12} - 1]}. \tag{26}$$

Da im allgemeinen für Staubteilchen in atmosphärischer Luft $\psi_1 < \psi_2$ ist, erhält man für sehr große Werte von $|\psi_1 r_{12}|$ die Reflexionszahl zu:

$$\varrho_{12} \cong \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}, \tag{26a}$$

wenn $|\psi_1 r_{12}| \gg 1$ und $b = \sqrt{\lambda c_p / v}$ (kcal/m °C $h^{1/2}$) die Wärmebelastungsfähigkeit ist. Meist ist dabei $b_2 \gg b_1$, so daß man praktisch $\varrho_{12} \cong -1$ erhält.

Für genügend kleine Werte von $|\psi_2 r_{12}|$ wird andererseits:

$$\varrho_{12} \cong \frac{\lambda_1(\psi_1 r_{12} + 1) - \lambda_2 \frac{1}{3}(\psi_2 r_{12})^2}{\lambda_1(\psi_1 r_{12} + 1) + \lambda_2 \frac{1}{3}(\psi_2 r_{12})^2}, \tag{26b}$$

wenn $\frac{1}{45}|\psi_2 r_{12}|^4 = \frac{4}{45}(\varphi_2 r_{12})^4 \ll 1$ ist. Daraus ergibt sich als Grenzwert für kleinste Werte von $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|\psi_2 r_{12}| \ll 1$ die Reflexionszahl zu $\varrho_{12} \cong +1$; genauer wird:

$$1 - \varrho_{12} \cong \frac{\frac{2}{3}\lambda_2(\psi_2 r_{12})^2}{\lambda_1(\psi_1 r_{12} + 1) + \lambda_2 \frac{1}{3}(\psi_2 r_{12})^2} \approx j\frac{4}{3}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\varphi_2 r_{12})^2, \tag{26c}$$

wenn $\varphi_1 r_{12} \ll 1$ ist.

In Abb. 1 ist die durch Gl. (26) gegebene Abhängigkeit der Reflexionszahl in der Gaussschen Zahlenebene für bestimmte Verhältnisse anschaulich durch die größere der beiden halbkreisförmigen Kurven (ausgezogene Kurve) dargestellt. Man findet in diesem Bild unmittelbar die Reflexionszahl ϱ_{12}, außerdem $1 + \varrho_{12}$ und $1 - \varrho_{12}$ als Vektoren jeweils zwischen einem bestimmten Punkt der Kurve und den Punkten 0 bzw. -1 und $+1$ auf der Achse der reellen Zahlen; auf diese Weise erhält man also unmittelbar den Betrag und den Phasenwinkel dieser Größen. Die Real- und Imaginärteile von ϱ_{12} sind außerdem noch besonders in Abb. 2 dargestellt (ausgezogene Kurven).

b) Die Schwingungseigenschaften in komplexer Form. Für die Berechnung der Schwingungseigenschaften des Gases findet man nach Gl. (23) für feste Schwebeteilchen mit $\Gamma = 0$ die

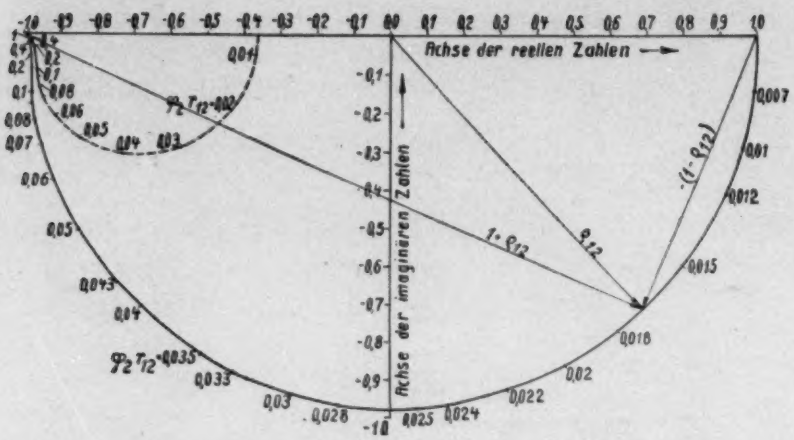

Abb. 1. Darstellung komplexer Reflexionszahlen ϱ_{12} für Temperatur-Wärmewellen an einer Kugeloberfläche in der GAUSS'schen Zahlenebene.

Die ausgezogene Kurve stellt die Reflexionszahlen an einem festen (unverdampfbaren) Schwebeteilchen in atmosphärischer Luft für ein Verhältnis der Temperaturleitzahlen von $a_1/a_2 = 100$ bei einem Verhältnis der Wärmeleitzahlen der Luft und des Stoffes der Schwebeteilchen von $\lambda_1/\lambda_2 = 0{,}044$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Größe $\varphi_2 r_{12} = r_{12}\sqrt{\omega/2a_2}$ dar.

Die gestrichelte Kurve stellt die Reflexionszahlen an einem Wassertröpfchen in atmosphärischer Luft für die Verhältnisse $a_1/a_2 = 160$, $\lambda_1/\lambda_2 = 0{,}044$ und $k\,w\,\Gamma/\lambda_2 = 0{,}094$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Größe $\varphi_2 r_{12} = r_{12}\sqrt{\omega/2a_2}$ dar.

Der Unterschied in beiden Kurven wird im wesentlichen durch die periodische Verdampfung und Kondensation von Wasser an der Oberfläche des Tröpfchens verursacht.

folgende komplexe Beziehung:

$$(27)\qquad \frac{1}{C+jK\omega} = \frac{V_1}{F\varkappa P_1}\left\{1+\frac{V_2}{V_1}\,\mathfrak{Y}_{12}\right\},$$

wobei bedeutet:

$$\mathfrak{Y}_{12} = \frac{3}{2}(\varkappa-1)(1-\varrho_{12})\,\frac{\psi_1 r_{12}+1}{(\psi_1 r_{12})^2}.$$

Für genügend große Beträge von $\psi_1 r_{12}$ erhält man daraus in guter Näherung mit $\varrho_{12} \cong -1$, $\psi_1 = (1+j)\,\varphi_1$ und $\varphi_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2a_1}}$:

$$(27a)\qquad \frac{1}{C+jK\omega} \cong \frac{V_1}{F\varkappa P_1}\left\{1+3\,\frac{V_2}{V_1}\,\frac{\varkappa-1}{(1+j)\,\varphi_1 r_{12}}\right\},$$

wenn $\varphi_1 r_{12} \gg 1$ ist.

Mit Gl. (26c) erhält man nach Gl. (27) die entsprechende Beziehung für verschwindende Werte von $\varphi_1 r_{12}$ in der Form:

$$(27b)\qquad \frac{1}{C+jK\omega} \cong \frac{V_1}{F\varkappa P_1}\left\{1+(\varkappa-1)\,\frac{V_2}{V_1}\,\frac{c_{p_2}\,v_1}{c_{p_1}\,v_2}\right\}.$$

Die Dämpfung von kleinen Druckschwingungen in einem staubhaltigen Gasraum verschwindet also bei genügend kleinen Werten von $\varphi_1 r_{12}$ ganz. ($K = 0$) und die Elastizität des Gasraumes wird entsprechend dem $(\varkappa - 1)$-fachen Verhältnis des Wasserwertes der Staubteilchen zu dem des zugehörigen Gasraums geringer.

c) Die Elastizität. Durch Vergleich der Realteile von Gl. (27) findet man zunächst die folgende Beziehung:

$$(28)\qquad \frac{C\,V_1}{\varkappa P_1 F}\left[1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2\right] = \frac{1}{1+2\,Y_2\cdot V_2/V_1},$$

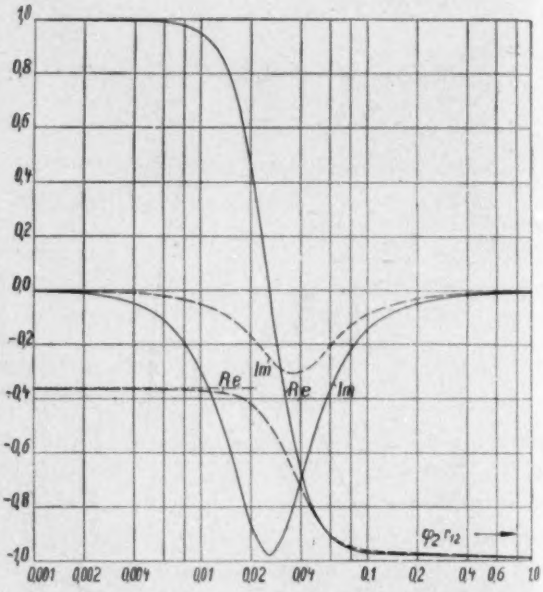

Abb. 2. Realteile „Re" und Imaginärteile „Im" komplexer Reflexionszahlen ϱ_{12} für Temperatur-Wärmewellen an einer Kugeloberfläche in Abhängigkeit von der dimensionslosen Größe $\varphi_2 r_{12} = r_{12}\sqrt{\omega/2a_2}$ für die gleichen Verhältnisse wie in Abb. 1.

Die ausgezogenen Kurven gelten wieder für feste Teilchen, die gestrichelten für Wassertröpfchen in atmosphärischer Luft von 20° C.

Die Abszissenachse und die entsprechenden horizontalen Geraden stellen jeweils die Asymptoten der Kurven dar.

wobei

$$Y_2 = \frac{3}{8}\,\frac{\varkappa-1}{(\varphi_1 r_{12})^2}\,Re\,\{(1-\varrho_{12})\,[(1-j)\,\varphi_1 r_{12} - j]\},$$

und Re ... „Realteil von ..." bedeutet.

Wie sich später noch ergeben wird, ist das Quadrat des Dämpfungsverhältnisses $\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2$ im allgemeinen sehr klein im Vergleich zu 1, so daß der Wert der eckigen Klammer der linken Seite dieser Gleichung in guter Näherung gleich 1 ist. Die Gl. (28) liefert also praktisch die Federung eines staubhaltigen Gases in dimensionsloser Form.

Für genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ findet man danach mit Gl. (26a) [wobei $\frac{K\omega}{C}$ nach der später entwickelten Gl. (29a) praktisch gleich Null wird] den Grenzwert:

$$\frac{C V_1}{\varkappa P_1 F} \cong \frac{1}{1+\frac{3}{4}\frac{V_2}{V_1}(\varkappa-1)\frac{2 b_2}{b_1+b_2}\frac{1}{\varphi_1 r_{12}}} \approx 1 = \frac{C_{ad} V_1}{\varkappa P_1 F}, \tag{28a}$$

wenn $\varphi_1 r_{12} \gg 1$ ist; C_{ad} stellt dabei den oberen Grenzwert der elastischen Konstante bei adiabatischer Verdichtung des staubhaltigen Gases dar, der durch genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ danach auch praktisch erreicht werden kann.

Für sehr kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ findet man andererseits mit Gl. (26c):

$$\frac{C V_1}{\varkappa P_1 F} \cong \frac{1}{1+\frac{V_2}{V_1}(\varkappa-1)\frac{c_{p_2} v_1}{c_{p_1} v_2}(1+\varphi_1 r_{12})}, \tag{28b}$$

wenn $\varphi_1 r_{12} \ll 1$ ist. Man erhält damit also den früher schon gefundenen unteren Grenzwert der Federung staubhaltiger Gase nach Gl. (27b), der entsprechend dem Einfluß des Wasserwertes der Staubteilchen vom oberen Grenzwert abweicht.

In Abb. 3 ist zur besseren Verallgemeinerung nur die Hilfsfunktion Y_2 von Gl. (28) für einen Sonderfall dargestellt (gestrichelte Kurve). Man erkennt auch aus dieser Darstellung anschaulich, daß alle elastischen Konstanten von staubhaltigen Gasen zwischen den durch die Gl. (28a) und (28b) bestimmten Grenzwerten liegen.

d) Das Dämpfungsverhältnis. Aus Gl. (27) findet man allgemein für das dimensionslose Dämpfungsverhältnis $\frac{K\omega}{C}$ die folgende Beziehung:

$$\frac{\frac{K\omega}{C}}{\frac{C V_1}{\varkappa P_1 F}\left[1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2\right]} = Y_1 \cdot \frac{V_2}{V_1}, \tag{29}$$

wobei bedeutet:

$$Y_1 = \frac{3}{4}\frac{\varkappa-1}{(\varphi_1 r_{12})^2}\,\mathrm{Re}\left[(1-\varrho_{12})\left(1+(1+j)\,\varphi_1 r_{12}\right)\right].$$

Der Nenner auf der linken Seite der Gl. (29) ist größenordnungsweise gleich 1 und kann

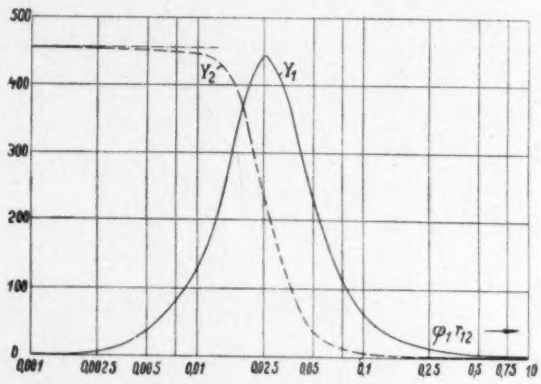

Abb. 3. Hilfskurven zur Berechnung der Schwingungseigenschaften von atmosphärischer Luft ($\varkappa = 1{,}4$), die feste (nicht verdampfbare) Schwebeteilchen (Staub) enthält ($a_1/a_2 = 100$; $\lambda_1/\lambda_2 = 0{,}044$).

Beide Kurven liefern zusammen die genauen Werte der Elastizität und des Dämpfungsverhältnisses der Luft nach Gl. (28) und (29).

Die eingezeichnete Gerade und die Abszissenachse stellen die Asymptoten dieser Hilfskurven dar.

als Korrekturfaktor nach Gl. (28) bzw. mit Hilfe der gestrichelten Hilfskurve Y_2 von Abb. 3 berechnet werden. Damit erhält man nach der vorstehenden Gl. (29) das gesuchte Dämpfungsverhältnis $\frac{K\omega}{C}$. Insbesondere findet man danach in Verbindung mit Gl. (28a) für genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ und für $\varrho_{12} \cong -1$:

$$\frac{K\omega}{C} \cong \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}, \tag{29a}$$

wenn $\varphi_1 r_{12} \gg 1$ ist. Man erkennt daraus, daß die thermische Dämpfung von Gasschwingungen durch Staubteilchen mit wachsenden Werten von $\varphi_1 r_{12}$ allmählich verschwindet. Die periodische Verdichtung des Gases nähert sich dabei immer mehr der verlustfreien adiabatischen Zustandsänderung. Da nach Gl. (16) für normale Schallwellen große

Werte von $\varphi_1 r_{12}$ ausgeschlossen sind, beschränkt sich die Anwendung dieser Näherungsgleichungen für große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ allgemein auf Fälle, bei denen praktisch keine Relativbewegungen der Staubteilchen auftreten, wie z. B. bei Schwingungen von Gasblasen in Flüssigkeiten.

Schließlich ergibt sich noch für kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ nach Gl. (29) in Verbindung mit Gl. (26c) und (28b) die Beziehung:

$$\frac{K\omega}{C} \cong \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}(\varkappa-1)\frac{c_{p_2}v_1}{c_{p_1}v_2}\cdot \mathrm{Re}\left[\frac{(1-j)\varphi_1 r_{12}-j}{\frac{3}{2}\{(1+j)\varphi_1 r_{12}+1\}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}j(\varphi_1 r_{12})^2}\right]$$

(29b)

$$=\frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}(\varkappa-1)\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2\frac{(1+\varphi_1 r_{12})(\varphi_2 r_{12})^2\cdot\left[1+\frac{V_2}{V_1}(\varkappa-1)(1+\varphi_1 r_{12})\cdot\frac{c_{p_2}v_1}{c_{p_1}v_2}\right]}{\left(\frac{3}{2}\right)^2(1+\varphi_1 r_{12})^2+\left[\frac{3}{2}\varphi_1 r_{12}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\varphi_2 r_{12})^2\right]^2},$$

wenn $\frac{4}{45}\cdot(\varphi_2 r_{12})^4 \ll 1$ ist. Die Dämpfung verschwindet also bei kleinen Werten von $\varphi_2 r_{12}$ ganz ($K=0$), was auch schon Gl. (27b) zeigte. Als Beschränkung für die Zuverlässigkeit dieser Beziehungen für kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ ist dabei allgemein die nach Gl. (17) berechenbare gegenseitige Mindestentfernung E zweier benachbarter Staubteilchen zu berücksichtigen.

In Abb. 3 ist die Hilfsfunktion Y_1 für einen bestimmten Fall in Abhängigkeit von $\varphi_1 r_{12}$ dargestellt (ausgezogene Kurve). Multipliziert man also die hieraus für bestimmte Werte von $\varphi_1 r_{12}$ entnommenen Beträge mit dem entsprechenden Volumenverhältnis V_2/V_1 der staubhaltigen Luft, so erhält man in erster Näherung den zugehörigen Wert von $\frac{K\omega}{C}$; dieser entspricht mit π multipliziert dem logarithmischen Dämpfungsdekrement entsprechender Eigenschwingungen oder kann nach Gl. (25) in den auf die Längeneinheit des Weges einer Schallwelle bezogenen Dämpfungsfaktor umgerechnet werden. Die genaue Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses nach Gl. (29) unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Federung des Gases bietet mit Hilfe der Gl. (28) bzw. der beiden Kurven in Abb. 3 keine Schwierigkeiten. Damit kann dann auch die Federung nach Gl. (28) genau bestimmt werden, so daß also alle schwingungstechnischen Eigenschaften eines Gases mit unverdampfbaren Schwebeteilchen berechenbar sind. Nachfolgend soll nun noch die Wirkung der periodischen Verdampfung an schwebenden Flüssigkeitströpfchen auf die Schwingungseigenschaften der Luft näher betrachtet werden.

3. Wassertröpfchen in Luft

a) Die Reflexionszahl für Temperaturwellen. Bei dem technisch am meisten interessierenden Sonderfall von Flüssigkeitstropfen in einer Gasatmosphäre, nämlich für Wasserdampf in Luft, wird die Diffusionszahl k in erster Näherung gleich der Temperaturleitfähigkeit a_1 der Luft, so daß dann also $\Psi = \psi_1$ wird. Damit vereinfacht sich zunächst die Reflexionszahl ϱ_{12} für kugelsymmetrische Temperatur-Wärmewellen nach Gl. (13) auf folgende Beziehung:

$$\varrho_{12} \cong \frac{(\lambda_1 - k w \Gamma)(\psi_1 r_{12}+1)-\lambda_2(\psi_2 r_{12}\operatorname{Ctg}\psi_2 r_{12}}{(\lambda_1 + k w \Gamma)(\psi_1 r_{12}+1)+\lambda_2(\psi_2 r_{12}\operatorname{Ctg}\psi_2 r_{12}}$$

(30)

Für hinreichend große Beträge von $\psi_1 r_{12}$ bzw. $\psi_2 r_{12}$ erhält man danach:

$$\varrho_{12} \cong \frac{b_1-(b_2+w\Gamma\sqrt{k})}{b_1+b_2+w\Gamma\sqrt{k}},$$

(30a)

wobei $\psi_2 r_{12} > \psi_1 r_{12} \geqslant 1$ ist; unter atmosphärischen Bedingungen ist dabei ferner für Wassertröpfchen in Luft $b_1 \leqslant b_2 + w\Gamma\sqrt{k}$, so daß man nach Gl. (30a) in diesem Grenzfall praktisch $\varrho_{12} \approx -1$ erhält.

Für genügend kleine Beträge von $\psi_2 r_{12}$ ergibt sich andererseits für die Reflexionszahl aus Gl. (30) die Beziehung:

$$\varrho_{12} \cong \frac{(\lambda_1 - k w \Gamma)(\psi_1 r_{12}+1)-\frac{1}{3}\lambda_2(\psi_2 r_{12})^2}{(\lambda_1 + k w \Gamma)(\psi_1 r_{12}+1)+\frac{1}{3}\lambda_1(\psi_2 r_{12})^2},$$

(30b)

wenn $\frac{1}{45}|\psi_2 r_{12}|^4 = \frac{4}{45}(\varphi_2 r_{12})^4 \ll 1$ ist.

Da unter atmosphärischen Bedingungen für Wassertropfen in Luft $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cong 23$, $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \cong 12{,}6$ und $k\,w\,\Gamma/\lambda_1 \simeq 2{,}1$ ist, erkennt man hieraus klar den wachsenden Einfluß der Verdampfung mit abnehmendem Halbmesser des Tröpfchens bzw. bei kleiner werdender Frequenz. Während man für nichtverdampfende Schwebeteilchen ($\Gamma = 0$) als Grenzwert für verschwindende Werte von $\varphi_2 r_{12}$ stets $\varrho_{12} = +1$ findet, erhält man für Wassertropfen den Grenzwert:

$$\varrho_{12} = \frac{\lambda_1 - k\,w\,\Gamma}{\lambda_1 + k\,w\,\Gamma}\,; \tag{30c}$$

$\varphi_1 r_{12} < \varphi_2 r_{12} \ll 1$.

Für eine mittlere Temperatur von 20° C erhält man so für Wassertropfen in Luft als Größtwert der Reflexionszahl $\varrho_{12} = -0{,}36$.

Abb. 1 zeigt die Veränderlichkeit der komplexen Reflexionszahl mit der Kenngröße $\varphi_2 r_{12}$ anschaulich in der Gaussschen Zahlenebene (gestrichelte Kurve); in Abb. 2 sind außerdem noch die Real- und Imaginärteile besonders aufgetragen (gestrichelte Kurven).

b) Die Schwingungseigenschaften in komplexer Form. An Stelle der allgemeineren Gl. (23) erhält man hier die folgende Beziehung zur Berechnung der Schwingungseigenschaften von nebliger Luft.

$$\frac{1}{C + j\,K\,\omega} = \frac{V_1}{F\,\varkappa\,P_1}\left\{1 + \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}(\varkappa - 1)(1 - \varrho_{12})\frac{1 + \psi_1 r_{12}}{(\psi_1 r_{12})^2}\left(1 - v_1\,T_1\,\Gamma\frac{1 + \varrho_{12}}{1 - \varrho_{12}}\right)\right\}. \tag{31}$$

Die Grenzwerte dieser Schwingungseigenschaften findet man danach für sehr große Werte von $|\psi_1 r_{12}|$ aus der Beziehung:

$$\frac{1}{C + j\,K\,\omega} \cong \frac{V_1}{F\,\varkappa\,P_1}\left\{1 + 3\,\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa - 1}{\psi_1 r_{12}}\right\}, \tag{31a}$$

wenn $|\psi_1 r_{12}| \gg 1$ ist.

Für genügend kleine Beträge von $\psi_1 r_{12}$ findet man andererseits mit Hilfe der Gl. (30c) die Beziehung:

$$\frac{1}{C + j\,K\,\omega} \cong \frac{V_1}{F\,\varkappa\,P_1}\left\{1 + 3\,\frac{V_2}{V_1}\frac{k\,w\,\Gamma}{\lambda_1 + k\,w\,\Gamma}\frac{\varkappa - 1}{(\psi_1 r_{12})^2}\left(1 - \frac{c_{p_1} T_1}{w}\right)\right\}, \tag{31b}$$

wenn: $|\psi_1 r_{12}| < |\psi_2 r_{12}| \ll 1$ ist.

Für Zahlenrechnungen ist jeweils wieder die Trennung in Real- und Imaginärteil bzw. Betrag und Phasenwinkel erforderlich, was nachstehend erfolgen soll.

c) Die Elastizität. Die elastische Konstante für nebelhaltige Luft findet man nach Gl. (31) in erster Näherung aus der nachstehenden Beziehung:

$$\frac{C\,V_1}{F\,\varkappa\,P_1}\left[1 + \left(\frac{K\,\omega}{C}\right)^2\right] = \frac{1}{1 + Y_4 \cdot \frac{V_2}{V_1}}\,; \tag{32}$$

darin ist praktisch meist $\left(\frac{K\,\omega}{C}\right)^2 \ll 1$, und außerdem bedeutet:

$$Y_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varkappa - 1}{(\varphi_1 r_{12})^2}\,\mathrm{Re}\,\{[(1 - j)\,\varphi_1 r_{12} - j]\,[1 - \varrho_{12} - (1 + \varrho_{12})\,v_1\,T_1\,\Gamma]\}$$

Für sehr große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ erhält man danach mit $\varrho_{12} = -1$ nach Gl. (30a) (wobei $\left(\frac{K\,\omega}{C}\right)^2$ nach der später entwickelten Gl. (33a) praktisch gleich Null wird) in Übereinstimmung mit Gl. (31a) den Grenzwert:

$$\frac{C\,V_1}{F\,\varkappa\,P_1} \cong \frac{1}{1 + \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa - 1}{\varphi_1 r_{12}}} \approx 1 = \frac{C_{ad}\,V_1}{F\,\varkappa\,P_1}, \tag{32a}$$

wenn: $\varphi_1 r_{12} \gg 1$ ist.

Die Elastizität nebliger Luft nähert sich also mit wachsenden Werten von $\varphi_1 r_{12}$ immer mehr dem adiabatischen Grenzwert C_{ad}.

Für genügend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ findet man ferner nach Gl. (32) in Verbindung mit Gl. (30b) für die Berechnung der elastischen Konstante der Luft die Beziehung:

$$\frac{C V_1}{F \varkappa P_1}\left[1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2\right] \cong \frac{1}{1+\frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}} \Gamma \frac{k w-\lambda_1 v_1 T_1}{\lambda_1 + k w \Gamma}}, \tag{32b}$$

wenn: $\varphi_1 r_{12} < \varphi_2 r_{12} \ll 1$ ist.

Die Luft verliert danach also mit kleiner werdenden Beträgen von $\varphi_1 r_{12}$ infolge der starken Wärmeableitung durch die Verdampfung an der Oberfläche der Wassertröpfchen an Elastizität. Zu beachten ist allerdings, daß diese Verdampfung entsprechend der Beschränkung nach Gl. (18) keine wesentlichen Raumänderungen des Tröpfchens bewirken darf, andernfalls wird das Tropfenvolumen V_2 in Gl. (32b), entsprechend seiner Abhängigkeit mit der dritten Potenz vom Tropfenhalbmesser r_{12}, schneller Null als $\varphi_1 r_{12}$. Die Elastizität der Luft erreicht dann wieder den adiabatischen Grenzwert.

In Abb. 4 ist zur weitgehenden Verallgemeinerung nur die Hilfsfunktion Y_4 von Gl. (32) durch die gestrichelte Kurve anschaulich dargestellt; die Grenzwerte dieser Hilfsfunktion für größte und kleinste Werte von $\varphi_1 r_{12}$, entsprechend den Gl. (32a und b), ergeben dabei die eingezeichneten Asymptoten dieser Kurve.

d) Das Dämpfungsverhältnis. Für das dimensionslose Dämpfungsverhältnis des Gasraumes findet man nach Gl. (31) allgemein die Beziehung

$$\frac{\frac{K\omega}{C}}{\frac{C V_1}{F \varkappa P_1}\left[1+\left(\frac{K\omega}{C}\right)^2\right]} = Y_3 \cdot \frac{V_2}{V_1}, \tag{33}$$

wobei bedeutet:

$$Y_3 = \frac{3}{4}\frac{\varkappa-1}{(\varphi_1 r_{12})^2} \operatorname{Re}\{[(1+j)\varphi_1 r_{12}+1][1-\varrho_{12}-(1+\varrho_{12}) v_1 T_1 \Gamma]\}.$$

Für genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ erhält man daraus also in Verbindung mit Gl. (32a) und $\varrho_{12} = -1$ nach Gl. (31a):

$$\frac{K\omega}{C} \cong \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}\left[1+\frac{3}{2}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}\right] \approx \frac{3}{2}\frac{V_2}{V_1}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}, \tag{33a}$$

wenn: $\varphi_2 r_{12} > \varphi_1 r_{12} \gg 1$ ist.

Daraus erkennt man, daß die Dämpfung von Druckschwingungen auch in nebliger Luft für genügend große Werte von $\varphi_1 r_{12}$ verschwindend klein wird.

Für genügend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ findet man in Verbindung mit Gl. (32b) als Dämpfungsverhältnis die folgende Beziehung:

$$\frac{K\omega}{C} = \frac{\frac{3}{2}\frac{\varkappa-1}{(\varphi_1 r_{12})^2}\frac{V_2}{V_1}\frac{k w-\lambda_1 v_1 T_1}{\lambda_1 + k w \Gamma}\Gamma}{1+\frac{3}{2}\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}\frac{V_2}{V_1}\frac{k w-\lambda_1 v_1 T_1}{\lambda_1 + k w \Gamma}\Gamma}, \tag{33b}$$

wenn: $\varphi_1 r_{12} < \varphi_2 r_{12} \ll 1$ ist.

Für verschwindend kleine Werte von $\varphi_1 r_{12}$ erhält man danach theoretisch den Grenzfall:

$$\frac{K\omega}{C} = \frac{1}{\varphi_1 r_{12}}, \tag{33c}$$

wenn: $\varphi_1 r_{12} \ll \frac{3}{2}(\varkappa-1)\frac{V_2}{V_1}\Gamma\frac{k w-\lambda_1 v_1 T_1}{\lambda_1 + k w \Gamma}$ ist.

Danach müßte sich also infolge der Verdampfung für verschwindende Werte von $\varphi_1 r_{12}$ eine beliebig hohe Dämpfung einstellen. Zu beachten ist dabei aber, entsprechend der Gültigkeitsgrenze nach Gl. (18), daß die Änderung der Tropfengröße infolge der Verdampfung noch vernachlässigbar klein bleibt. Bei größeren Druckschwingungen kann daher dieser Grenzwert nicht erreicht werden, da hierbei in Gl. (33b) das Volumen V_2 der Tropfen mit der dritten Potenz von r_{12}, d. h. also schneller als $(\varphi_1 r_{12})^2$ klein wird. Die thermische Dämpfung verschwindet daher in diesem Fall für Wellenteile mit hohem Druck, während sie für Wellenteile niedrigen Druckes relativ groß ist; es entsteht dadurch also eine Verzerrung der Druckwelle.

In Abb. 4 ist zur Verallgemeinerung der Darstellung nur die Hilfs-Funktion Y_3 von Gl. (33) als Funktion von $\varphi_1 r_{12}$ durch die ausgezogene Kurve dargestellt.

e) Zahlenbeispiel. Um die Größenordnung der zu erwartenden thermischen Dämpfung von Schallwellen durch allerkleinste Wassertröpfchen in der Atmosphäre zu veranschaulichen, soll noch der auf die Einheit ihres Weges bezogene Dämpfungsfaktor α berechnet werden.

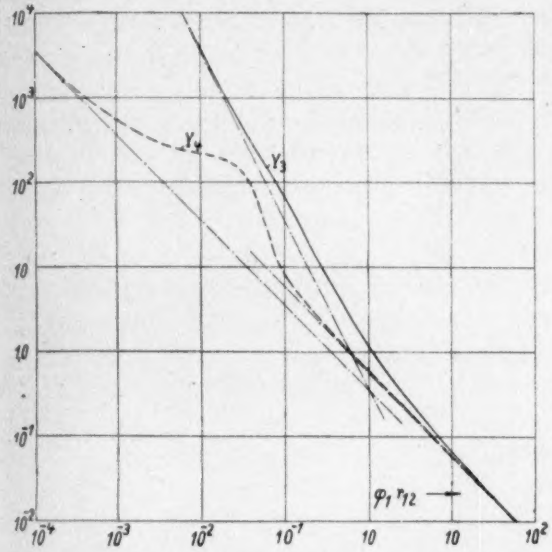

Abb. 4. Hilfskurven zur Berechnung der Schwingungseigenschaften von atmosphärischer Luft ($\varkappa = 1{,}4$), die Wassertröpfchen (Nebel) enthält ($a_1/a_2 = 160$; $\lambda_1/\lambda_2 = 0{,}044$; $k\,w\,\Gamma/\lambda_2 = 0{,}094$). Beide Kurven liefern zusammen die genauen Werte der Elastizität und des Dämpfungsverhältnisses der Luft nach Gl. (32) und (33). Die eingezeichneten Geraden stellen die Asymptoten der Hilfskurven dar.

Setzt man dabei so kleine Frequenzen voraus, daß $\varphi_1 r_{12} < \varphi_2 r_{12} \ll 1$ ist — d. h. praktisch für Frequenzen bis etwa 10^4 Hz bei $r_{12} \approx 10^{-4}$ mm — so kann man hierzu die Näherungsgleichung (33b) verwenden. Man erhält daher entsprechend Gl. (25) zunächst:

$$\alpha = \frac{3\,\frac{(\varkappa-1)\,a_1}{c\cdot r_{12}^2}\cdot\frac{V_2}{V_1}}{\frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{\lambda_1 + k\,w\,\Gamma}{k\,w - \lambda_1 v_1 T_1} + \frac{3}{2}\,\frac{\varkappa-1}{\varphi_1 r_{12}}\,\frac{V_2}{V_1}}. \tag{34}$$

Unter normalen atmosphärischen Bedingungen ist nun $\varkappa \cong 1{,}4$; $\Gamma \cong 10^{-3}$ kg/m³ °K; $k w \Gamma \cong 0{,}047$ kcal/mh °C; $\lambda_1 \cong 0{,}022$ kcal/mh °C; $v_1 \cong 0{,}84$ m³/kg; $T_1 \cong 293^0$ K; $a_1 \cong 0{,}077$ m²/h und $c \cong 340 \cdot 3600$ m/h. Bezeichnet man noch die in 1 m³ befindliche Zahl der Wassertröpfchen mit n, so wird also $V_2/V_1 = n\,r_{12}^3\,\pi\,4/3$ und man erhält dann an Stelle von Gl. (34):

$$\alpha = \frac{3{,}15\cdot 10^{-7}\,n\cdot r_{12}}{2{,}18 + 0{,}984\,n\,\frac{r_{12}}{\sqrt{\omega}}}. \tag{34a}$$

Nach Wegener[16]) ist nun die Zahl der Kondensationskerne bei Landluft in etwa 100 m Höhe $n = 4{,}5\cdot 10^{10}$ m^{-3}; über Großstädten und in Bodennähe kann sie ein Vielfaches dieser Zahl erreichen. Nimmt man nun an, daß jeder dieser Kondensationskerne mit einer Wasserhaut umgeben ist und setzt dabei einen mittleren Halbmesser dieser verschiedensten Teilchen von etwa $r_{12} = 10^{-7}$ m voraus, so erhält man also nach Gl. (34a):

$$\alpha = \frac{2{,}02\cdot 10^{-3}}{2{,}18 + \frac{4{,}45}{10^4\cdot\sqrt{\omega}}} \cong 10^{-3}\,(\mathrm{m}^{-1}).$$

Bei einer kleinsten Frequenz von 5 Hz, entsprechend $\omega = 5\cdot 2\,\pi\cdot 3600 = 1{,}13\cdot 10^5\,(\mathrm{h}^{-1})$, findet man als Gültigkeitsgrenze für diese Rechnung nach Gl. (18), daß die Schwingungsweite der Schallwellen $\Delta P \ll 10^{-4}\,P_1$ sein muß. Für höhere Frequenzen dürfen dabei die Schwingungsweiten ΔP verhältnisgleich anwachsen.

Man erhält also unter diesen Umständen im Bereich hörbarer Schallwellen praktisch unabhängig von der Frequenz einen Dämpfungsfaktor $\alpha \approx 10^{-3}$ (m^{-1}). Die dabei in flüssiger Form in der Luft vorhandene Wassermenge ist geringer als $2\cdot 10^{-4}$ g/m³, während nach Wegener[16]) beispielsweise bei Nebel im Mittel etwa 2 g/m³ gemessen wurden und die dampfförmige Wassermenge bei Sättigung etwa 18 g/m³ beträgt.

Daraus ergibt sich also, daß die periodische Verdampfung und Kondensation an kleinsten, in der Atmosphäre schwebenden, unsichtbaren Flüssigkeitströpfchen eine Dämpfung von Schallwellen verursacht, die mit praktisch gemessenen Dämpfungswerten von vergleichbarer Größenordnung ist. Bei der Beurteilung

[16]) A. u. K. Wegener, Physik der Atmosphäre, Verlag J. A. Barth, Leipzig 1935, S. 29.

praktischer Messungen ist zu beachten, daß die Tröpfchen auch in den verschiedensten Größen vorkommen können; ihr Durchmesser ist wesentlich von der Temperatur und Feuchtigkeit des Gases sowie von der Art der Kondensationskerne (Ionen, Salzkristalle usw.) abhängig. Allgemeine Angaben über die thermische Dämpfung von Schallwellen in derartigen Gasen können daher erst dann gemacht werden, wenn über die Zahl und Größenverhältnisse der Schwebeteilchen genauere Versuchsunterlagen vorliegen.

Zusammenfassung

An Hand der Differentialgleichung der nichtstationären Wärmeleitung und Diffusion werden zunächst Lösungen für die periodischen Temperatur- und Dampfkonzentrationsfelder in der Umgebung eines kugelförmigen Schwebeteilchens in einer Gasatmosphäre entwickelt, wenn in dieser entsprechende periodische Druckschwankungen auftreten. Einige Sonderbetrachtungen liefern die Grenzen der Gültigkeit dieser Entwicklungen. Mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Wärmelehre können dann die Zustandsänderungen des Gas-Dampfgemisches in der Umgebung der Schwebeteilchen und damit dessen Schwingungseigenschaften berechnet werden. Zu ihrer einfachen Berechnung wurden für besondere Fälle Hilfskurven aufgezeichnet. Die Durchrechnung eines Beispieles zeigt, daß u. U. ein wesentlicher Anteil der praktisch meßbaren Dämpfung von normalen Schallwellen auf diese thermische Dämpfung durch unsichtbare, kleinste Wassertröpfchen zurückgeführt werden kann.

(Eingegangen am 19. August 1940.)

Die Messung von akustischen Scheinwiderständen und Schluckzahlen durch Rückwirkung auf ein Telefon

Mitteilung aus dem Laboratorium voor Technische Physica der Technische Hoogeschool de Delft

Von C. W. Kosten und C. Zwikker

(Mit 11 Textabbildungen)

1. Einleitung

Zwei vielverbreitete Methoden zur Bestimmung von Schallschluckzahlen von handelsüblichen Stoffen sind:

a) das Nachhallverfahren,

b) die Interferenzmethode.

Beim Nachhallverfahren werden die Nachhallzeiten eines Meßraumes mit und ohne das zu prüfende Material verglichen. Aus den beiden Nachhallzeiten, der Oberfläche der Probe und dem Volumen des Meßraumes läßt sich die Schallschluckzahl a berechnen. Es ist nicht unsere Absicht, hier die Nachteile des Nachhallverfahrens zu beschreiben, jedoch sei bemerkt, daß die benötigte Apparatur ziemlich groß ist, die Resultate so unsicher, daß Messungen aus verschiedenen Laboratorien kaum vergleichbar sind[1]).

Bei der Interferenzmethode läßt man eine senkrecht zur Oberfläche eintretende Schallwelle interferieren mit der vom Material reflektierten Welle. Die Ausführung geschieht zweckmäßig in einem Rohr. Bei einer früheren Ausführung[2]) wurde die Schluckzahl aus der Größe der Druckmaxima und Druckminima der stehenden Welle berechnet. Wente und Bedell[3]) haben theoretisch gezeigt, daß die

[1]) P. E. Sabine, J. Acous. Soc. Am. 6 (1935), S. 239. R. M. Morris, G. M. Nixon und J. S. Parkinson, J. Acous. Soc. Am. 9 (1938), S. 234. E. Meyer und A. Schoch, Akust. Z. 4 (1939), S. 51.

[2]) H. O. Taylor, Phys. Rev. 2 (1913), S. 270.

[3]) E. C. Wente and E. N. Bedell, Bell Syst. techn. J. 7 (1928) S. 1.

Messung auch auf zahlreichen anderen auf dem Interferenzprinzip beruhenden Weisen vorzunehmen ist, indem an der stehenden Welle andere Größen unter verschiedenen Versuchsbedingungen gemessen werden. Auf Grund kritischer Genauigkeitsbetrachtungen wählen sie eine von der TAYLORschen abweichende Methode.

Sowohl beim Nachhallverfahren als bei der Interferenzmethode sind eine Schallquelle sowie ein Mikrophon unbedingt erforderlich. Beim Nachhallverfahren bedeutet dies nicht so sehr eine Komplikation, wohl aber bei der Interferenzmethode, da ohne spezielle Maßnahmen das Mikrophon das Schallfeld erheblich stört. Versuche des zweiten Verfassers auf diesem Gebiete haben auch deshalb nicht den gewünschten Erfolg gehabt.

Bekannt ist weiter, daß durch Messung der elektrischen Rückwirkung eines in Resonanz schwingenden Telefons mechanische Scheinwiderstände prinzipiell meßbar sind. KENNELLY hat schon im Jahre 1923 auf die Möglichkeit hingewiesen, mit einer solchen Methode akustische Eigenschaften von handelsüblichen Stoffen zu messen[4]). Soweit uns bekannt, ist es bis jetzt nicht gelungen, eine befriedigende Meßmethode nach diesem Prinzip herzustellen[5])[6])[7])[8]). Durch eine andere praktische Ausführung und durch einfache Auswertung der Meßergebnisse ist es aber gelungen, mit einer provisorischen Apparatur nach diesem Prinzip zuverlässige Resultate zu erreichen. Ohne Zweifel läßt sich nach dieser Methode ein sehr zuverlässiger Apparat bauen, mit dem Schallschluckzahlen an Proben von rund 50 cm² zu messen sind oder mit dem man die Schallschluckzahl an vielen willkürlichen Stellen einer fertigen Wand zur Homogenitätsprüfung des Materials messen kann. Der Apparat ist ohne Schwierigkeiten leicht tragbar zu machen. Überdies ist die Methode insoweit einfach regulierbar, als die größte Empfindlichkeit im Gebiete der zu erwartenden Schallschluckzahl gewählt werden kann.

Da die Methode nicht nur die Schallschluckzahl liefert, sondern auch den akustischen Scheinwiderstand (Wirk- und Blindanteil), kann sie ein wichtiges Hilfsmittel bei der theoretischen Erklärung des Absorptionsvorganges sein. Durch seine Genauigkeit ist sie wahrscheinlich anderen Scheinwiderstandsmeßmethoden überlegen. Ein Nachteil ist allerdings die Beschränkung auf normalen Schalleinfall.

2. Die Eigenschaften des Telefons[9]).

Das Telefon sei prinzipiell dadurch festgelegt, daß es aus einer ferromagnetischen Membrane in kurzer Entfernung vor einem permanenten Magneten besteht, um den die Telefonspule gewickelt ist. Es läßt sich zeigen, daß der totale Scheinwiderstand Z_{tot} der Spule aus zwei wesentlich verschiedenen Teilen zusammengestellt ist, nämlich:

$$Z_{tot} = Z_{el} + \frac{M^2}{Z_m}. \tag{1}$$

In dieser Formel ist M die komplexe elektrodynamische Kopplungskonstante des Telefons, Z_m der mechanische Scheinwiderstand der Membrane. Macht man $Z_m = \infty$, indem man die Membrane festbremst, so ergibt Gl. (1):

$$Z_{tot} = Z_{el}\,|_{fest}. \tag{2}$$

Der erste Teil Z_{el} des totalen Scheinwiderstandes Z_{tot} ist also aufzufassen als der eigentliche elektrische Scheinwiderstand, der zweite Teil M^2/Z_m als Zusatz infolge der Rückwirkung des mechanischen Schwingungssystems.

Sind bei einer bestimmten Frequenz Z_{tot} und Z_{el} durch Messung des Telefones mit freier bzw. festgebremster Membrane bekannt, so ist die Größe M^2/Z_m durch vektorielle

[4]) A. E. KENNELLY, Electrical vibration instruments, New York 1923, S. 190.

[5]) K. KUROKAWA, J. Inst. electr. Engrs. Jap. Suppl., Februar 1923.

[6]) P. A. JEANNE, Dissertation Mass. Inst. Technology, 1923.

[7]) A. E. KENNELLY, J. Franklin Inst. 200 (1925), S. 467.

[8]) K. SCHUSTER und A. HOHBERG, Ann. d. Phys. (5. F.) 16 (1933), S. 203.

[9]) Eine eingehende und interessante Arbeit über die Eigenschaften des Telefons ist: KENNELLY, s. Anm. 4.

Subtraktion von Z_{tot} und Z_{el} zu bestimmen. Sie ist bei vielen Frequenzen auszuführen. Wir finden dann das in Abb. 1a, b, c schematisch Dargestellte, nämlich den totalen Scheinwiderstand (a), dessen Teile Z_{el} (b) und M^2/Z_m (c). Bekanntlich können wir für Z_m ansetzen:

$$Z_m = j\omega m + R_m + \frac{1}{j\omega C}, \tag{3}$$

worin

ω = Kreisfrequenz der Schwingung,
m = wirksame Masse der Membrane (kleiner als totale Masse),
R_m = Wirkwiderstand,
C = Federung der Membrane (Kehrwert der Steife).

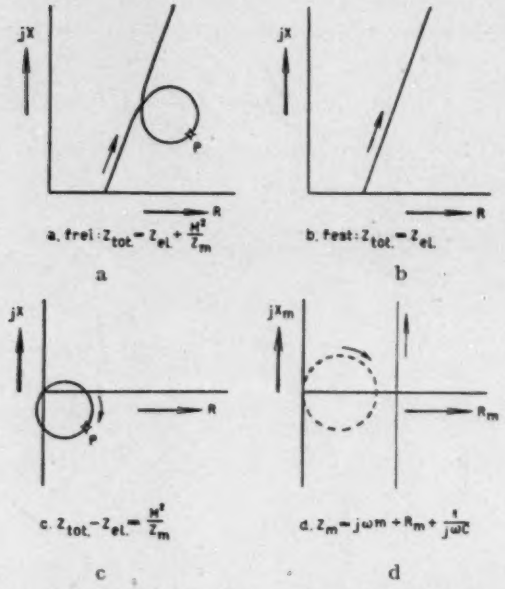

Abb. 1. Abb. 1a zeigt die allgemeine Scheinwiderstandskurve eines Telefons, 1b und 1c stellen den elektrischen Anteil Z_{el} bzw. den Rückwirkungsanteil M^2/Z_m dar. 1d gibt den mechanischen Scheinwiderstand der Membrane; gestrichelt die Inversion $1/Z_m$. Die Pfeile längs der Kurven bedeuten die Richtung steigender Frequenz

Aus Gl. (3) ist die vektorielle Darstellung Abb. 1d leicht einzusehen sowie die Inversion $1/Z_m$ (gestrichelt). Resonanz ist erreicht für:

$$j\omega m + \frac{1}{j\omega C} = 0, \tag{4}$$

also für:

$$Z_m = R_m.$$

Dieser Fall stimmt überein mit dem Punkte P in Abb. 1a und c.

Aus der Abb. 1d ist ohne weiteres ersichtlich, daß jede mechanische Zusatzhemmung der Membrane im Falle der Resonanz zur Folge hat, daß der gesamte mechanische Scheinwiderstand einen Realteil hat, der größer als R_m ist, daß deswegen die Inversion innerhalb des gestrichelten Kreises fallen muß und daß also auch die Rückwirkung in Abb. 1c innerhalb des Kreises fällt.

Solche Fälle findet man bei KENNELLY[10]) beschrieben. Der uns am meisten interessierende Fall ist der, daß die Zusatzwiderstandshemmung durch eine Luftsäule variabler Länge erzeugt wird (Ausführung: Telefon am Ende eines Hohlzylinders). Das Telefon ist auf Resonanz abgestimmt. Beim Ändern der Luftsäulenlänge änderte sich die Rückwirkung derart, daß praktisch derselbe Kreis durchlaufen wird, den wir oben bei einer Frequenzänderung gefunden haben.

Wie dieses sich ausarbeiten läßt zu einer absoluten Absorptionsmessung, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

3. Das Prinzip des Meßverfahrens

Bekanntlich führt die Definition der Schallschluckzahl a zu der Gleichung:

$$a = 1 - \left|\frac{z - \varrho c}{z + \varrho c}\right|^2, \tag{5}$$

mit

z = spezifischer akustischer Scheinwiderstand des Materials,
= Schalldruck / Schnelle,
ϱc = Wellenwiderstand der Luft,
= Luftdichte × Schallgeschwindigkeit.

In (5) ist z eine komplexe Größe. Deshalb ist eine bestimmte Zahl a für unendlich viele Werte von z zu erwarten. In Abb. 2 sind im komplexen Scheinwiderstandsdiagramm die Linien konstanter Schallschluckzahl a gezeichnet. Sie sind Kreise, die sich um so mehr dem Punkte $z = \varrho c$ nähern, je höher die Schallschluckzahl wird. Dieses Diagramm bedeutet eine wesentliche Vereinfachung der Schluckzahlrechnung, da bei gemessenem z das zugehörende a ohne weiteres dem Diagramm ent-

[10]) A. a. O., s. Anm. 4 und 7.

nommen werden kann. (Siehe SCHUSTER und HOHBERG Anm. 8).

Abb. 3 gibt eine prinzipielle Übersicht der benötigten elektrischen und mechanischen Apparatur. Die Probe befindet sich am Ende eines Hohlzylinders, in welchem das Telefon genau passend hin und her geschoben werden

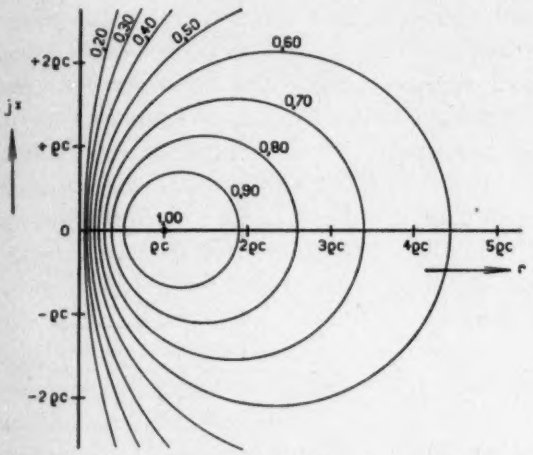

Abb. 2. Kurven konstanter Schallschluckzahl a im akustischen Scheinwiderstandsdiagramm

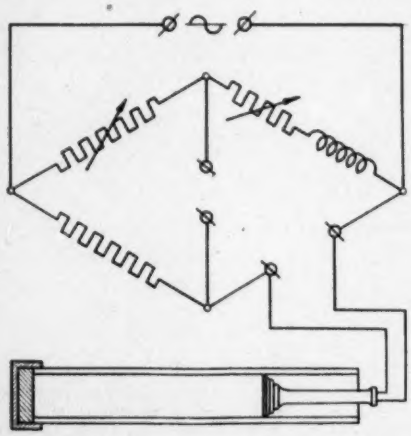

Abb. 3. Apparatur zur Schallschluckmessung

kann. Eine einfache Wechselstrombrücke mißt den Scheinwiderstand der Spule mit einer Genauigkeit von etwa $2^0/_{00}$. Damit das Telefon soweit als möglich dem Schallfelde ausgesetzt ist, ist die die Membrane einschließende Kappe soweit weggenommen, als die gute Einspannung der Membrane es erlaubt.

Sei S die Querschnittsfläche des Zylinders, so ist der totale mechanische Scheinwiderstand der Probe $z\,S$. Die Membrane (Fläche S_0) spürt hiervon durch Transformation den mechanischen Scheinwiderstand:

$$z\,S \cdot \frac{S_0^2}{S^2} = \frac{z\,S_0^2}{S}\,.$$

Diese einfache Transformationsformel ist nur gültig, solange die Wellenlänge groß gegenüber den Querabmessungen ist. Überdies gilt sie nur dann, wenn der Scheinwiderstand in der „Oberfläche" des Materials gemessen wird. An einer anderen Stelle im Zylinder gemessen, findet man im allgemeinen einen anderen Wert, jedoch berechnet man aus all diesen Messungen dieselbe Zahl a, denn die Schluckzahl a ist unabhängig von der Festlegung der Meßfläche. Die gefundenen z-Werte bilden zusammen einen von den in Abb. 2 gegebenen Kreisen von konstantem a.

Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, nehmen wir von jetzt ab an, daß das Telefon genau auf Resonanz abgestimmt ist. Das Telefon hat also selbst den mechanischen Scheinwiderstand R_m. Überdies ist es dem akustischen Scheinwiderstand der Luftsäule mit Materialabschluß ausgesetzt. Es ist also:

$$(Z_m)_{res} = R_m + \frac{z\,S_0^2}{S}\,. \tag{6}$$

Diese Gleichung ist in Abb. 4 schematisch dargestellt. Jeden Kreis kann man sich einem bestimmten Material zugehörend denken. Wählen wir uns als Einheit der Inversion R_m.

Die Inversion eines Kreises ist ebenfalls ein Kreis. Die Inversion der Kreise von konstantem a sind also Kreise, die um so kleiner werden, je größer a ist. Die Inversion von C sei C'. Die Inversion des Kreises von $a\%$ $(E\,D)$ ist gestrichelt gezeichnet $(E'\,D')$.

Aus Gl. (5) geht hervor, daß:

$$\frac{B\,D}{B\,C} = \frac{z}{\varrho\,c} = \frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}\,. \tag{7}$$

Weiter ist wegen der Inversion:

$$\frac{B\,D}{B\,C} = \frac{\dfrac{A\,B}{A\,D'} - 1}{\dfrac{A\,B}{A\,C'} - 1}\,. \tag{8}$$

Wenn also die Verhältnisse AB/AD' und AB/AC' bestimmt worden sind, ist a aus (8)

und (7) zu berechnen. Zur Bestimmung des Verhältnisses AB/AC' braucht man ein Material mit 100% Absorption, was nicht einfach herzustellen ist. Ganz einfach aber ist eine Probe aus Kapok herzustellen, die 90—95% Absorption hat. Im Inversionsdiagramm bedeutet dieses ein kleiner Kreis um C', im z-Diagramm

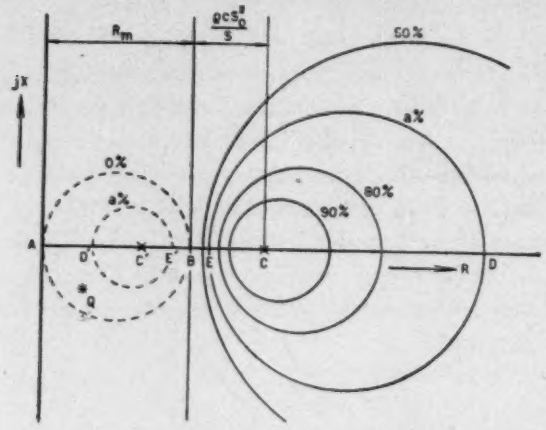

Abb. 4. Bestimmung der Schluckzahl aus den gemessenen Scheinwiderständen

ein kleiner Kreis um C. Allgemein gilt nun infolge Gl. (5) für jeden Kreis:

$$BC = \sqrt{BE \cdot BD}.$$

Auf diese Weise läßt sich der Punkt C auffinden und daher auch C'. Theoretisch genügen die Punkte A, D', E' und B zur Absorptionsmessung. Wegen der Genauigkeit ist aber C' besser zu verwenden anstatt E', zumal wenn a klein ist. Aus der Abb. 4 ist ohne weiteres ersichtlich, daß theoretisch schon ein einziger beliebiger Punkt Q zur a-Bestimmung genügt. Man braucht nicht den ganzen Kreis für das Material zu bestimmen. Die Punkte A, C' und B sind ein für allemal für jedes Telefon festzulegen.

Bis jetzt haben wir angenommen, daß die Größe $1/Z_m$ aus den Scheinwiderstandsmessungen hervorgeht.

Wir messen aber nicht $1/Z_m$, sondern die Rückwirkung M^2/Z_m. M ist komplex. Die Phase von M bedeutet eine Drehung der Abb. 4, interessiert uns also nicht, wenn wir alle Winkel in bezug auf das gedrehte Koordinatensystem messen. Der Modul von M bedeutet eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Abb. 4, interessiert uns auch nicht, da es sich nur um Verhältniszahlen handelt. Auch die Einheit der Inversion ist deshalb gleichgültig.

Man könnte denken, daß der Hohlzylinder unnötig sei. Es genügt ja eine einzige Messung, also z. B. die Messung, bei der das Telefon sich in sehr kurzer Entfernung vom Material befindet, d. h. das Telefon mit seinem Rande gegen das Material gedrückt ist. Jedoch muß man in diesem Falle die Lage der Punkte C und C' auf andere Weise bestimmen als oben beschrieben, z. B. muß der Innendurchmesser des Zylinders gleich dem freien Teil der Membran sein. Der Hohlzylinder ist weiter für eine Empfindlichkeitsregulierung zu gebrauchen. Nimmt man seinen Innendurchmesser größer, so verkleinert man das Verhältnis $\varrho c S_0^2/S$ zu R_m und verschiebt damit die größte Empfindlichkeit nach niedrigeren Schluckzahlen. Auf diese Möglichkeit verzichtet man, wenn man nur mit dem Telefon direkt auf dem Material mißt.

4. Einige Meßbeispiele.

Benutzt wurde ein Telefon mit einer Resonanzfrequenz von etwa 710 Hz. Der Meßstrom durch das Telefon betrug etwa 0,5 mA. Der Hohlzylinder war ein Messingzylinder mit 5 mm Wandstärke und 7 cm Innendurchmesser. Das Telefon hatte einen Außendurchmesser von etwa 6,9 cm. Das Festbremsen der Membrane wurde ohne die Membrane zu berühren durch eine Pertinaxscheibe bewirkt, die in etwa 0,3 mm Entfernung von der Membrane angebracht wurde (s. Abb. 5). Diese Methode wurde gewählt, weil das Telefon in Resonanz sehr störungsempfindlich ist, z. B. für Temperaturschwankungen, für eine Änderung der Einspannkräfte, für Berührung usw. Deshalb ist ein solid gebautes Telefon zu empfehlen, damit die Einspannung nicht durch Zufälligkeiten geändert wird.

Die Abb. 6 und 7 zeigen die gemessenen Scheinwiderstandskurven des Telefons mit fester bzw. freier Membrane. Die Abb. 8, 9 und 10 zeigen einige Meßergebnisse mit dem Telefon in Resonanz. Die Abb. 8 gibt Absorptionskreise

für eine Kapokprobe (1), Celotex BBB (2), Schwammgummi (3) und eine Glasplatte (4). Nur die Rückwirkung ist eingetragen, also die Größe M^2/Z_{ges}. Für jedes Material ist also ein ganzer Kreis bestimmt worden. Das Telefon wurde dazu in regelmäßigen Abständen über

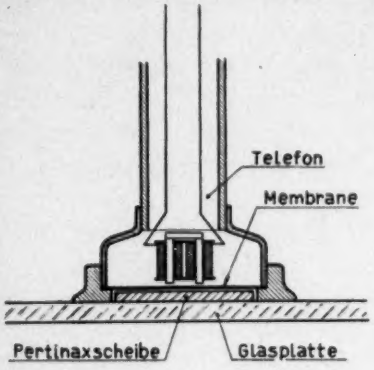

Abb. 5. Festlegung der Membrane

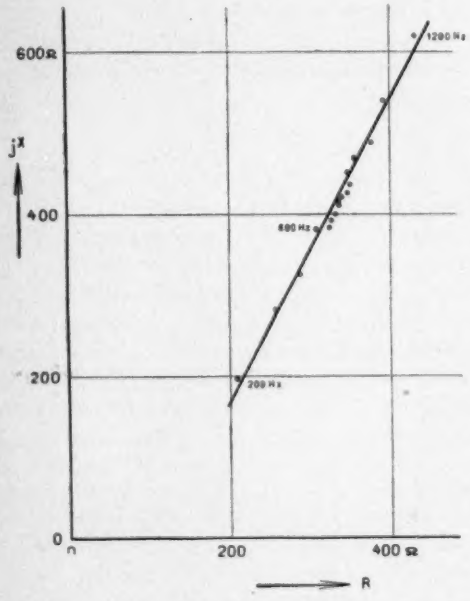

Abb. 6. Scheinwiderstand des festgebremsten Telefons als Funktion der Frequenz

eine Strecke von etwa 50 cm im Zylinder verstellt. Die errechneten Schluckzahlen sind für die Kreise angegeben. Die Schluckzahl 0,19 für Glas rührt von den Unvollkommenheiten der provisorischen Apparatur her. Das Telefon paßt nicht genau, hat auch selber eine Schallschluckung; weiter gab es auch bei den Proben kleine Schlitze usw. Wenn die Apparatur besser ausgeführt ist, wird die „Nullabsorption" (hier 0,19) ohne Schwierigkeiten auf 0,05 oder weniger herabzusetzen sein. Unter der Annahme, daß diese 5% von der Absorption am Telefon herrühren, lassen sich die Ergebnisse korrigieren,

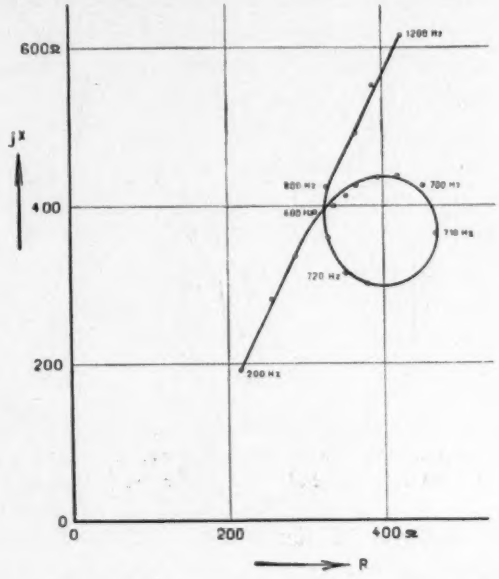

Abb. 7. Scheinwiderstand des freischwingenden Telefons als Funktion der Frequenz

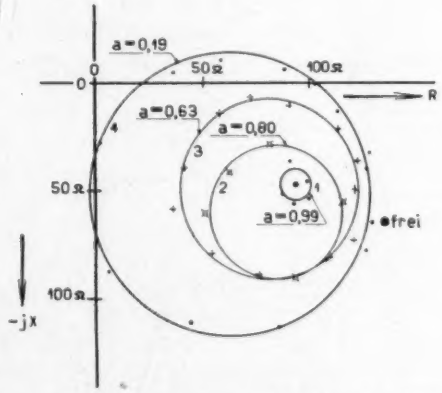

Abb. 8. Rückwirkungskreise für Kapok (1), Celotex BBB (2), Schwammgummi (3), Glasplatte (4)

indem man ansetzt: die gemessene Reflektion ($r = 1 - a$) ist gleich der Nullreflektion (z. B. 0,95) mal der gesuchten Reflektion. Dies ist nicht als streng gültig anzusehen, dürfte aber als erste Annäherung genügen. Die Dämpfung durch die Wand des Rohres ist unmeßbar klein.

Die Abb. 9 gibt ähnliche Resultate wie Abb. 8. Interessant ist der Kreis (4) für Glas. Das Telefon war durch eine unbekannte Ursache nicht mehr auf Resonanz abgestimmt; die für den Kreis zu errechnende Schallschluckzahl ist

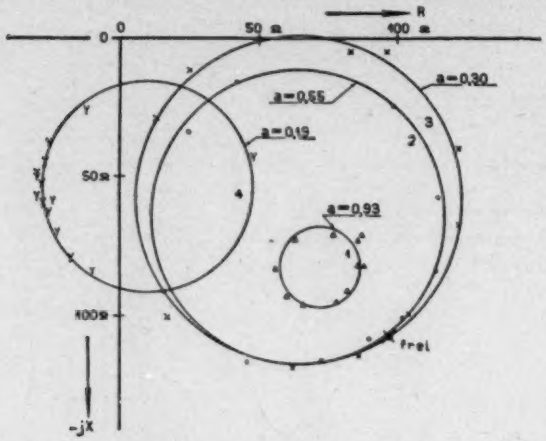

Abb. 9. Rückwirkungskreise für Kapok (1), für zwei Schwammgummisorten (2) und (3), für eine Glasplatte (4). Bei (4) ist außerhalb der Resonanz gemessen

aber wieder 0,19. Dieses zeigt, daß auch außerhalb Resonanz gemessen werden kann, daß dann aber die größte Empfindlichkeit stark nach niedrigeren Schluckzahlen verschoben ist. Theoretisch ist dieses leicht ersichtlich.

Die Abb. 10 gibt Messungen mit dem Telefon unmittelbar auf der Probe, also ohne Zylinder.

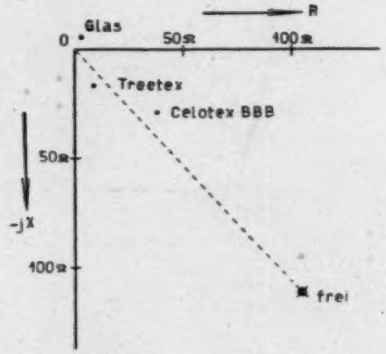

Abb. 10. Messung direkt am Material ohne Zylinder

Es zeigt sich, daß jetzt Glas keine Verluste hat, wie es in Ordnung ist. Die Glasplatte benimmt sich wie eine steife Feder durch die Federung der Luftschicht zwischen Membrane und Glasplatte. Ohne weiteres liest man den Phasenwinkel des Scheinwiderstandes ab. Der Phasenwinkel von Treetex und Celotex BBB stellt sich ziemlich klein heraus, wenigstens bei der Meßfrequenz 700 Hz. Für Schluckzahlberechnungen ist die Abb. 10 nicht direkt vergleichbar mit den Abb. 8 und 9, da die Oberflächen S der Luftsäulen nicht gleich groß sind. Der berechnete Wert für Celotex BBB (0,74) stimmt sehr gut überein mit dem aus Abb. 8 berechneten und korrigierten Wert (0,75). Für Treetex liefert Abb. 10 $a = 0{,}18$ in Übereinstimmung mit Messungen nach anderen Verfahren.

5. Weiterer Ausbau des Verfahrens

Damit bei verschiedenen Frequenzen gemessen werden kann, ist am besten ein Telefon mit regulierbarer Resonanzfrequenz zu verwenden. Auf einfache Weise läßt die Resonanzfrequenz sich auch durch Befestigung von kleinen Massen in der Mitte der Membran bedeutend herabsetzen. Der Frequenzbereich ist auf derartige Weisen wahrscheinlich von 300 bis 2500 Hz[10]) auszudehnen. Das wichtigste Gebiet der akustischen Frequenzen ist damit erfaßt. Auch lohnte es sich vielleicht, einige Telefone mit verschiedenen festen Resonanzfrequenzen, z. B. 250, 500, 750, 1000, 1500, 2000 und 2500 Hz herzustellen. Spezielle Maßregeln sind zu treffen, damit die Einspannung der Membran solide und wenn möglich reproduzierbar ist.

Die Frequenzempfindlichkeit des Telefons in Resonanz wäre vielleicht durch elektrische Rückkopplung mit der Stromquelle zu verkleinern. Jedoch ist dieses nicht ohne weiteres ausführbar, da sonst akustische Einflüsse automatisch eine Frequenzänderung zur Folge haben.

Wenn die Materialproben in einem Hohlzylinder geprüft werden, stellt die Methode weiter keine Anforderungen an die Proben. Wird die Messung mit dem Telefon direkt am Material vorgenommen, so ist die Materialdicke klein zu nehmen, da die Schallwellen sonst seitlich zu wenig Widerstand erfahren. Dieses wäre teilweise zu beseitigen, indem man dem Telefon einen verbreiterten Rand (z. B. Außendurchmesser 20 cm) gibt (s. Abb. 11a). Die Abb. 11b gibt eine andere Möglichkeit. Das Telefon wird zusammen mit einem kurzen Hohlzylinder benutzt. Dadurch sind die Randfehler kleiner, zugleich ist aber die größte Empfindlichkeit nach

[10]) Siehe für niedrige Resonanzfrequenzen A. E. Kennelly, Anm. 4, für ein Telefon mit besonders hohem Resonanzfrequenz H. Jacoby und H. Panzerbieter, Elektr. Nachr.-Techn. 13 (1936), S. 75.

niedrigen Schluckzahlen verschoben. Auch wäre es möglich, ein Telefon zu bauen mit größerem Durchmesser. Jedoch setzt man damit den Frequenzmeßbereich herab. Endgültig ist dieses Problem aber erst gelöst durch Verwendung eines Schutzschallfeldes gleicher Stärke und gleicher Phase.

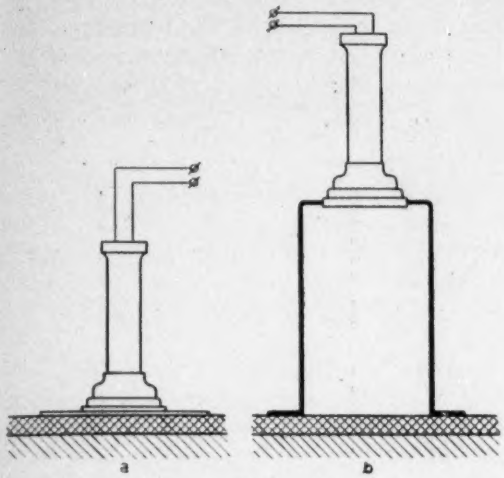

Abb. 11. Messungen an dicken Materialien. a) direkt am Material mit verbreitertem Auflagerand, b) mit kurzem Hohlzylinder mit verbreitertem Rand (geeignet für niedrige Schluckzahlen)

Zusammenfassung

Akustische Scheinwiderstände sind aus der Rückwirkung auf ein Resonanztelefon zu messen, wie KENNELLY bereits grundsätzlich gezeigt hat. Aus den Widerständen lassen sich die Schluckzahlen berechnen. Richtlinien für die praktische Ausführung werden gegeben. Was die Genauigkeit anbelangt, so scheint die Methode anderen absoluten Meßmethoden überlegen. Eine einfache und leicht tragbare Apparatur ist nach diesem Verfahren zu bauen, mit der an einer willkürlichen Stelle der zu prüfenden Wand oder an Proben von etwa 50 cm² in einem Hohlzylinder gemessen werden kann.

(Eingegangen am 30. Oktober 1940.)

SCHRIFTTUM

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

A. GIGLI, **L'Assorbimento Acustico delle Persone e l'Acustica delle Sale.** Alta Frequ. IX (1940) S. 103.

Die akustische Güte eines Theaters wird weitgehend durch die Größe der Nachhallzeit bestimmt, die ihrerseits von den Abmessungen des Raumes und von der Schallabsorption abhängt. Die Absorption wird z. T. bewirkt durch Wände, Decke und Boden, z. T. durch die Zuhörerschaft selbst. Während Rundfunkaufnahmeräume, die auch ohne Publikum benutzt werden, meist von vornherein schallabsorbierend ausgeführt werden, ist in Tonfilmkinos und besonders in Theatern die vom Publikum herrührende Absorption von entscheidender Bedeutung. Daraus folgt auch, daß sich die Frequenzabhängigkeit der Nachhallzeit in solchen Räumen herleitet aus der Frequenzabhängigkeit der Schallabsorption des Publikums.

Der Verfasser hat die bis heute bekannt gewordenen Messungen der Schallschluckung von Personen zusammengestellt und die Ergebnisse hinsichtlich der zugrunde liegenden Versuchsbedingungen kritisch verglichen. Er hat selbst derartige Messungen am Istituto Elettrotecnico Nazionale in einem Hallraum und in einer Aula ausgeführt und teilt seine Ergebnisse in der erwähnten Zusammenstellung mit.

So weit die Messungen in Theatern, Konzertsälen oder ähnlichen Räumen ausgeführt wurden, führten sie in der Regel zu recht verschiedenen Ergebnissen. Immerhin wurde die Schluckfläche einer Person bei 512 Hz von fast allen Autoren zu etwa 0,4 m² bestimmt, ein Wert, der schon 1899 von W. C. SABINE ermittelt werden konnte. Aus allen Messungen geht hervor, daß der Schluckgrad von Personen bis etwa 1000 Hz ansteigt, für höhere Frequenzen wieder abzufallen scheint. Dieser Befund bestätigt indirekt den auf andere Weise hergeleiteten Frequenzgang der optimalen Nachhallzeit eines mit Publikum besetzten Raumes. Die Streuung der von verschiedenen Autoren gefundenen Ergebnisse erklärt sich einerseits durch die Verschiedenheit der angewendeten Meßverfahren, andererseits durch die gänzlich verschiedenen Versuchsbedingungen. Meyer und Jordan wiesen z. B. schon darauf hin, daß die zusätzliche Schallschluckung der Zuhörerschaft nach Größe und Frequenzgang sehr stark von den Eigenschaften des leeren Raumes abhängt; auch zeigten sie, daß die Schluckzahl je Person bei geringer Besetzung des Raumes höher gefunden wird als bei starker Besetzung. Die Anzahl der Versuchspersonen variiert bei den eben besprochenen Messungen zwischen 12 und etwa 2000.

Im Gegensatz hierzu findet der Verfasser eine bemerkenswerte Übereinstimmung derjenigen Resultate, die bei Messungen in Hallräumen erhalten wurden (Abb. 1). Die Zahl der Versuchspersonen betrug hier in allen Fällen zwischen 9 und 15. Die Hallraummessungen liefern demnach zuverlässige Werte für den mittleren Schluckgrad einer Person, die jedoch nur bei Anwesenheit weniger Personen gelten. Sie liegen im Mittel höher als die mit zahlreichen Versuchspersonen und in normalen Räumen gefundenen Werte.

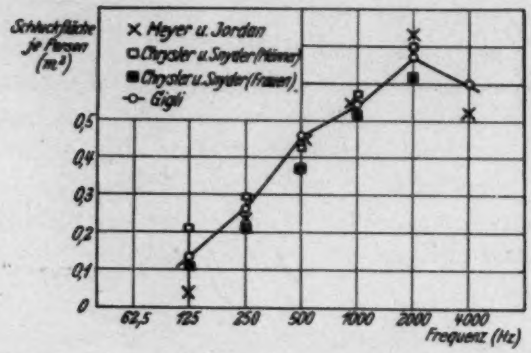

Abb. 1. Mittlere Schallschluckung von Personen nach Messungen in Hallräumen

Für die Schallabsorption einer größeren Zuhörerschaft ist es nach dem oben Gesagten kaum möglich, allgemein gültige Werte anzugeben; nach Ansicht des Verfassers ist es aber erlaubt, aus den bisher vorliegenden Meßergebnissen Mittelwerte zu entnehmen, die er in der folgenden Tabelle zusammengestellt hat:

Frequenz Hz:	125	250	500	1000	2000	4000
Mittlerer Absorpt. Koeff. je Person ...	0,20	0,35	0,38	0,45	0,40	~0,30

In diesen Werten soll die Absorption der Sessel mitberücksichtigt sein; sie sollen für den Fall gelten, daß der Raum zu drei Vierteln besetzt ist.

H. F. Gerdien

J. K. Hilliard, **The Theater Standardization Activities of the Research Council of the Academy of Motion Picture Arts and Sciences.** J. Soc. Mot. Pict. Engrs. 35 (1940) S. 388.

Die Aufgabe des Ausschusses besteht in der Aufstellung von Richtlinien und Empfehlungen über die technischen Eigenschaften und den Einbau von Tonfilmanlagen sowie in der Unterstützung der Theaterbesitzer bei der Verbesserung der akustischen und optischen Wiedergabegüte in ihren Lichtspielhäusern. Vorerst werden die Theater mit Hilfe eines Prüffilmes, der verschiedenartige Ton- und Bildszenen enthält, rein subjektiv geprüft, da die Abhörprobe neben den physikalischen Messungen doch immer das grundlegende und letzten Endes maßgebende Urteil zu bilden gestattet.

Ein Zusammenhang zwischen der Platzzahl und der mindestens geforderten elektrischen Ausgangsleistung der Verstärker ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zahl der Plätze	Erforderliche Mindestleistung der Verstärker
0— 400	10 Watt
400— 600	13 „
600— 750	15 „
750—1000	20 „
1000—1250	26 „
1250—1500	32 „
1500—1750	37 „
1750—2000	43 „
2000—2250	48 „
2250—2500	53 „
2500—2750	59 „
2750—3000	65 „
3000—3250	70 „
3250—3500	76 „
3500—3750	82 „
3750—4000	88 „
4000—4250	93 „
4250—4500	98 „
4500—4750	104 „
4750—5000	110 „
5000—5250	115 „
5250—5500	121 „
5500—5750	126 „
5750—6000	132 „

Die Werte scheinen uns, vor allem für die kleinen Theater, verhältnismäßig niedrig zu liegen. Sie sind offenbar dadurch zu erklären, daß man einen sehr guten Wirkungsgrad der Lautsprecher — Kombination zweier Trichterlautsprecher — vorausgesetzt hat. Schließlich kritisiert der Verfasser die Theaterbesitzer, die durchweg viel Geld für die Hebung der äußeren Bequemlichkeit und allenfalls auch noch für die Apparaturen ausgeben, während sie nichts für die Raumakustik ihres Hauses tun, obwohl hier oft schon mit geringen Mitteln bedeutende Verbesserungen zu erzielen seien.

E. Thienhaus

Sidney K. Shear und Alfred B. Focke, **The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel and magnesium.** Phys. Rev. 57 (1940), S. 532—537.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer longitudinaler Wellen in endlich ausgedehnten Körpern ist bekanntlich keine Konstante, es tritt vielmehr z. B. bei Stäben in dem Frequenzbereich, wo die Wellenlänge einer in der Längsrichtung des Stabes vorhandenen Schwingung mit den Querabmessungen vergleichbar wird, eine Dispersion der Schallgeschwindigkeit auf. Lange bevor experimentelle Untersuchungen über diese Erscheinungen möglich waren, hatte Lord Rayleigh ein derartiges Verhalten vorausgesagt, jedoch sind die später tatsächlich beobachteten Änderungen der Schallgeschwindigkeit viel größer als von Rayleigh berechnet. Im Jahre 1933 wurde von Giebe und

Blechschmidt eine neue Dispersionstheorie, speziell für Rohre, zylindrische und rechteckige Stäbe, veröffentlicht, die für Rohre in jeder Beziehung und mit großer Genauigkeit, bei Zylindern und rechteckigen Stäben bis zu solchen Frequenzen quantitativ bestätigt wurde, bei denen die elastische Halbwellenlänge gleich dem Stabdurchmesser bzw. der größeren Querschnittsseite ist, während darüber hinaus besonders beim Zylinder eine nicht mehr zuordenbare Vielzahl von Schwingungen auftritt, eine Beobachtung, die auch von Schöneck gemacht wurde. Zur weiteren Klärung dieser Fragen wurden von Shear und Focke nochmals zylindrische Stäbe in methodisch ähnlicher Weise wie von Röhrich und Schöneck einer genaueren Untersuchung unterzogen.

Nach Giebe und Blechschmidt kann man einen zylindrischen Stab aus zwei getrennten mechanischen Systemen zusammengesetzt denken, deren jedes eine Reihe von Eigenfrequenzen besitzt. Wird der Stab in Schwingungen versetzt, so tritt eine Kopplung zwischen beiden schwingenden Systemen auf. Zur Vereinfachung der Rechnungen wurde nur eine Kopplung zwischen der Serie der axialen Eigenschwingungen und der niedrigsten Radialschwingung in Ansatz gebracht. Das führt u. a. zu der Voraussage zweier Serien von longitudinalen Eigenschwingungen mit einer toten Zone zwischen ihnen, in der sich auf keine Weise longitudinale Schwingungen erregen lassen.

Die Untersuchungen von Shear und Focke zeigten eine sehr gute Übereinstimmung mit dieser Theorie bis zu der Frequenz, bei welcher die „tote Zone" beginnen sollte. Sie fanden aber ähnlich wie bereits Giebe und Blechschmidt und auch Schöneck Schwingungen in diesem verbotenen Gebiet. Um was für eine Art von Schwingungen es sich dabei handelt, war nicht eindeutig feststellbar, da außer Dehnungsschwingungen offenbar auch Biegungs- und Drillungsschwingungen sowie weitere Schwingungen unbekannter Art erregt werden. Auch aus den mit Lykopodiumpulver erzeugten Schwingungsbildern ließ sich in dem fraglichen Gebiet weder über Art noch Ordnungszahl der Mehrzahl der Schwingungen Eindeutiges aussagen. Trotzdem kommen Khear und Focke zu dem Schluß, daß diese Abweichungen von der Giebe-Blechschmidtschen Voraussage auf die von ihnen vorgenommene Vernachlässigung der Kopplung der axialen Serie der Eigenschwingungen mit höheren Ordnungszahlen der lateralen Serie zurückzuführen ist und daß bei strenger Rechnung bei Zylindern eine tote Zone nicht in Erscheinung tritt. Im Falle der Rohre, wo eine solche Zone wirklich beobachtet wurde, liegen die Verhältnisse insofern anders, als hier tatsächlich nur eine Kopplung der einen Serie mit einem einzigen Glied der zweiten Serie besteht. Auf diese Tatsache eines unterschiedlichen Verhaltens zwischen Rohr und Zylinder hatten auch Giebe und Blechschmidt bereits hingewiesen; sie waren jedoch der Meinung, daß die beim Zylinder auf die niedrigste Radialschwingung folgende Oberschwingung bereits eine rund 2,7 mal höhere Frequenz hat und dementsprechend weniger auf die Axialschwingung zurückwirkt. Blechschmidt

B. Baumzweiger, **Application of Piezoelectric Vibration Pick-Ups to Measurement of Acceleration, Velocity and Displacement** (Piezoelektrische Geber für Beschleunigungs-Geschwindigkeits- und Schwingwegmessung). J. Acous. Soc. Am. 11 (1940), S. 303—307.

Verf. beschreibt einen neuen piezoelektrischen Geber für Beschleunigungsmessungen. Als piezoelektrischer Indikator dienen zwei viereckige Kristallplättchen aus Rochelle-Salz. Sie sind mit den Elektroden fest verkittet und bilden eine bimorphe Einheit, die auf Biegung beansprucht wird. Das System ist also an drei Eckpunkten gehaltert, während die freie vierte Ecke als Element der Massenträgheit den Beschleunigungskräften den notwendigen Trägheitswiderstand entgegensetzt. Die Eigenfrequenz dieses Feder-Masse-Systems soll bei etwa 1500 Hz liegen; durch Beschweren der freien Ecke mit zusätzlichen Gewichten kann die Eigenschwingung herabgesetzt und die Empfindlichkeit erhöht werden.

Die Temperaturempfindlichkeit des Rochelle-Salzes macht sich durch Verändern der Eigenkapazität des Gebers bemerkbar. Um die Temperaturstabilität zu sichern, muß die Impedanz des Meßsystems immer größer als die Eigenimpedanz des Indikatorelementes gemacht werden.

Zur Eichung und zur Bestimmung der Frequenzkurve des Gebers dient eine Vergleichsmethode mit einem idealen Indikator sehr hoher Eigenfrequenz. Beide werden übereinander befestigt und auf eine piezoelektrische Schwingplatte aufgeklebt. Die Schwingplatte erzeugt zwar außerordentlich kleine Amplituden, jedoch ist der Frequenzbereich, der für die Untersuchung zur Verfügung steht, besonders nach den höheren Frequenzen, nicht in dem Maße beschränkt wie bei mechanischen Schwingern.

In einem Schaubild ist die gewonnene Frequenzkurve des neuen Gebers im Bereich zwischen 30 Hz und 3500 Hz mitgeteilt. Bis 600 Hz bleibt die Beschleunigungsanzeige linear, dann tritt die Resonanzüberhöhung in Erscheinung; sie läßt sich durch ein Zwischenfilter teilweise beseitigen. Um auch für die tiefen Frequenzen bis zu 1 Hz hinunter einen geradlinigen Beschleunigungsverlauf aufrecht zu erhalten, müßte die angeschlossene Kette bzw. der Verstärker einen Eingangswiderstand von mindestens 40 Megohm bekommen. Hier ergeben sich jedoch prinzipielle Schwierigkeiten.

Für die Zwecke der Integration schaltet Verf. den Geber über ein einfaches Netzwerk aus Widerständen und Kondensatoren an das Registriergerät. Oberhalb 15 Hz ergibt sich, wie ein Schaubild zeigt, amplitudenmäßig somit eine recht brauchbare Integration, und da bei der Registrierung auf eine Wiedergabe des Schwingungsverlaufs verzichtet wird, spielt die Phasenverzerrung durch das Netzwerk keine Rolle. Die Aufzeichnung erfolgt durch einen Pegelschreiber mit dem Meßbereich 0—120 db. F. J. Meister

Homer Dudley, **Remaking Speech.** J. Acous. Soc. Am. 11 (1939), S. 169—177.

In der vorliegenden Arbeit wird eine elektroakustische Übertragungsanlage für Sprache beschrieben, die von den üblichen Anlagen erheblich abweicht. Sie besteht im wesentlichen aus einem Analysator, der den Schall auf die Höhe des Grundtones und den Energieinhalt einzelner Frequenzbereiche untersucht und dafür entsprechende Gleichstromimpulse abgibt, und einem Synthesegerät, das von den Gleichstromimpulsen gesteuert die Sprache künstlich erzeugt (s. a. Akust. Z. 4 (1939), S. 346, A Synthetic Speaker). In Anlehnung an das in einer früheren Arbeit als „Voder" bezeichnete Synthesegerät trägt dieses die Bezeichnung „Vocoder", weil es die Sprache gewissermaßen verschlüsselt weitergibt.

In der Abbildung 1 ist der Aufbau des Gerätes schematisch dargestellt. Die vom Mikrophon gelieferten Wechselspannungen werden zwei getrennten Kanälen zugeführt; der obere dient zur Messung der Grundfrequenz, der untere zur spektralen Zerlegung des aufgenommenen Vorganges. Im oberen Kanal erfährt der Schwingungsvorgang zunächst durch den Verzerrer, dessen Dämpfung mit der Frequenz stark ansteigt, eine Bevorzugung des Grundtones. Dann folgt ein Kippgerät, das für jeden Nulldurchgang der Wechselspannung einen Gleichstromimpuls liefert, der von der Amplitude der Wechselspannung unabhängig ist. Ein Tiefpaß glättet diesen pulsierenden Gleichstrom, dessen Stärke von der Grundtonhöhe des aufgenommenen Klanges abhängt. Als Tonquellen für die synthetische Sprache dienen ein Rauschgenerator, in dem das Schrotrauschen einer Gastriode verwendet wird, und ein Impulsgenerator, der mittels einer Gastriode kurzzeitige Stromimpulse erzeugt. Im allgemeinen ist der Rauschgenerator eingeschaltet. Dies ist auch bei stimmlosen Konsonanten der Fall. Wird dagegen ein Vokal oder ein stimmhafter Konsonant gesprochen, d. h. ist eine meßbare Grundtonhöhe

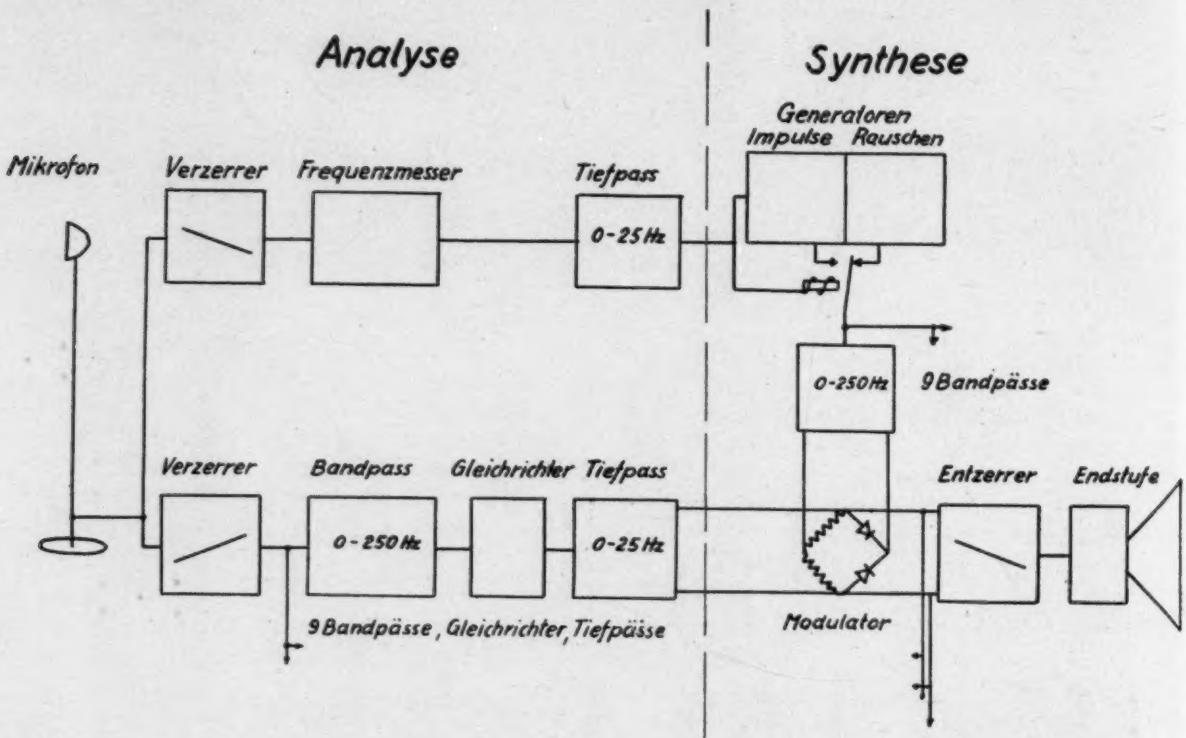

Abb. 1. Aufbau des „Vocoder". Links: Das Gerät zur Zerlegung der Sprache in Gleichstromimpulse entsprechend der Höhe des Grundtones und dem Energiegehalt einzelner Frequenzbereiche. Rechts: Das Synthesegerät, das von den Gleichstromimpulsen gesteuert, die Sprache künstlich wieder erzeugt

vorhanden, so tritt ein Tonhöhengleichstrom auf, der mittels eines Relais den Impulsgenerator einschaltet und durch seine Stärke eine bestimmte Impulsfrequenz einstellt. Der Rauschgenerator und der Impulsgenerator besitzen ein bis 3000 Hz konstantes Frequenzspektrum.

Zur spektralen Zerlegung des Klanges wird im unteren Kanal zunächst eine Bevorzugung der höheren Frequenzen vorgenommen, da die oberen Frequenzgebiete bei Sprache wesentlich energieärmer sind als die tiefen. Dies geschieht, um die nachfolgenden Teile der Apparatur mit größenordnungsmäßig gleichen Spannungen zu beschicken. Durch Bandpässe wird der Schwingungsvorgang in 10 Frequenzbänder zerlegt. Die Ausgangsspannung jedes Bandpasses wird gleichgerichtet und liefert nach nochmaliger Siebung einen dem Energieinhalt des betreffenden Frequenzbereiches entsprechenden Gleichstrom.

Die Steuerung der Tonquellen geschieht nun in folgender Weise. Die von den Generatoren erzeugte Wechselspannung wird durch Filter gleichfalls in 10 Frequenzbänder unterteilt und jedes Frequenzband einer besonderen Brückenanordnung zugeführt. Auf jede dieser Brücken wirkt außerdem der dem Frequenzbereich entsprechende Gleichstrom aus dem Analysator ein. Ist dieser gleich Null, so ist die Brücke abgeglichen und die Generatorspannung wird vom Ausgang und Lautsprecher ferngehalten. Steigt der Gleichstrom aber an, so wird das Brückengleichgewicht gestört und es gelangt eine gewisse Wechselspannung an den Ausgang. Der Gleichstrom jedes Frequenzbereiches des Analysators moduliert also das entsprechende Frequenzband des gerade eingeschalteten Generators. In einem Entzerrer wird die am Eingang vorgenommene Bevorzugung der hohen Frequenzen wieder rückgängig gemacht.

Das Gerät soll sehr zufriedenstellend arbeiten, was man aus den gezeigten Oszillogrammen wegen der natürlich vorhandenen Phasenverschiebungen nicht gut erkennen kann. Die Ansprechzeit beträgt etwa 18 msec. Der Vocoder ermöglicht aufschlußreiche Untersuchungen der Sprache und des Hörempfindens. Man kann nämlich die Abhängigkeit der Tonhöhe des Impulsgenerators vom Steuerstrom ändern, aufheben oder auch umkehren, was eine völlige Veränderung der Satzmelodie zur Folge hat. Weiterhin ist es möglich, die Frequenzverteilung zu variieren, tiefe Formantbereiche in hohe zu verwandeln und umgekehrt. Auch eine Dynamikdehnung oder Pressung ist durchführbar.

G. Buchmann

D. F. Seacord, **Room Noise at Subscribers' Telephone Locations.** J. Acous. Soc. Am. 12 (1940), S. 183—187.

Für die Bemessung der akustischen Eigenschaften von Fernsprechgeräten ist die Lautstärke der Störgeräusche beim Teilnehmer von Bedeutung, da hiervon die Verständlichkeit der Sprache sehr abhängt. In der vorliegenden Arbeit berichtet der Verf. über umfangreiche Messungen, die bei einer großen Zahl von Fernsprechteilnehmern in den verschiedensten Gegenden in USA. durchgeführt wurden.

Der für die Messungen benutzte objektive Lautstärkemesser entsprach den Festlegungen der American Standards Association. Er war mit einem Tauchspulenmikrophon ausgerüstet und hatte für den gesamten Meßbereich nur eine Frequenzkurve, die 40-phon-Kurve. Um Willkür bei der Messung nach Möglichkeit auszuschalten, erfolgte alle 5 Sekunden eine Ablesung; an jeder Meßstelle wurden von zwei Beobachtern insgesamt 50 Werte abgelesen.

Diese Messungen wurden im Sommer an 900 und im Winter an 500 verschiedenen Stellen im Gebiet in und um Chicago und Philadelphia und an mehr als 800 Stellen in Cleveland und dem Stadtgebiet von New York durchgeführt. Die Meßwerte wurden nach verschiedenen Gesichtspunkten geordnet und daraus Mittelwerte gebildet. Die Mittelwertsbildung erfolgte durch Aufstellung von Verteilungskurven, d. h. es wurde das Maximum der prozentualen Häufigkeit bestimmter Lautstärken festgestellt. Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung der Meßergebnisse.

Meßort	Jahresmittel der Raumgeräusche		Unterschied der Lautstärken im Sommer gegenüber denen im Winter
	Mittelwert	mittl. Abweichg.	
Wohnungen			
ohne Rundfunk	43	5,5	3
mit Rundfunk	50	8,0	4
Kleine Läden			
(< 6 Angestellte)	53,5	7,5	4
Große Läden			
(> 5 Angestellte)	61	6,0	0
Kleine Büros			
(< 3 Arbeitsplätze)	53,5	6,5	4,5
Mittlere Büros			
(3—10 Arbeitsplätze)	58	6,5	1
Große Büros			
(> 10 Arbeitsplätze)	64,5	4,5	0
Fabrikbüros	61,5	9,5	—2
Fabriken	77	12,0	—2

Die Werte schwanken zwischen 43 phon in Wohnungen ohne Rundfunk und 77 phon in Fabriken. Die größten Unterschiede der Lautstärken im